

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А. В. Гільчук, А. А. Халатов, Т. В. Доник

ТЕОРІЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Прикладна фізика»
спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензент

Коваленко А.С., канд.техн. наук, доц., старший науковий співробітник відділу високотемпературної термогазодинаміки Інституту технічної теплофізики НАНУ

Відповідальний
редактор

Смирнов, С.А., канд. фіз.-мат. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 10.12.2020 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту (протокол № 11 від 26.11.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Гільчук Андрій Володимирович, канд. фіз.-мат. наук.

Халатов Артем Артемович, д-р техн. наук, проф.

Доник Тетяна Василівна, канд. техн. наук

ТЕОРІЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Теорія теплопровідності: навчальний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спец. 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / А.В.Гільчук, А.А.Халатов, Т.В.Доник; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 4.56 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 153 с.

Навчальний посібник до курсу «Теорія теплопровідності» призначено для студентів, які навчаються за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали». У навчальному посібнику висвітлено такі питання як постановка і розв'язок стаціонарних рівнянь теплопровідності без джерел теплоти та з джерелами теплоти в різних системах координат з граничними умовами першого та третього роду, нестаціонарних рівнянь для необмеженої пластини, циліндра і кулі, теплообмін через оребрені поверхні та пористі стінки, надано основи теорії функцій Бесселя.

© А.В. Гільчук, А.А. Халатов, Т.В. Доник 2020

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ	5
ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1. ЗАКОН ФУР'Є ТА РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ	8
1.1. Види теплообміну	8
1.2. Закон Фур'є та коефіцієнт теплопровідності	11
1.3. Закон Ньютона	14
1.4. Диференційне рівняння теплопровідності	15
Питання для самоконтролю	21
РОЗДІЛ 2. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ БЕЗ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛОТИ	23
2.1. Одновимірне температурне поле	23
2.1.1. Теплопровідність та теплопередача через пласку стінку	23
2.1.2. Теплопровідність та теплопередача через циліндричну стінку	29
2.1.3. Теплопровідність та теплопередача через сферичну стінку	35
2.1.4. Теплопровідність та теплопередача через багатошарову пласку стінку. Аналогія з ланцюгами електричного струму	37
2.1.5. Теплопровідність та теплопередача через багатошарову циліндричну стінку	45
2.1.6. Критична товщина теплової ізоляції	47
2.2. Двовимірне температурне поле	50
2.2.1. Двовимірне температурне поле в напівобмеженій адіабатній пластині	50
2.2.2. Двовимірне температурне поле в довгому суцільному напівциліндрі	55
Питання для самоконтролю	58
РОЗДІЛ 3. СТАЦІОНАРНІ СИСТЕМИ З ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛОТИ	61
3.1. Суцільний круглий стрижень	61
3.2. Місцеве джерело теплоти в пластині при неадіабатних умовах	65
3.3. Температурне поле в електричних котушках	69

3.3.1. Температурне поле суцільної електричної котушки	69
3.3.2. Температурне поле порожнистої електричної котушки	77
Питання для самоконтролю	80
РОЗДІЛ 4. НЕСТАЦІОНАРНІ СИСТЕМИ. НАГРІВ ТА ОХОЛОДЖЕННЯ	81
4.1. Нестационарне температурне поле	81
4.2. Одновимірне рівняння теплопровідності	83
4.3. Випадок малого внутрішнього опору	90
4.4. Випадок малого поверхневого опору	92
4.5. Загальний випадок скінченних внутрішнього та поверхневого опорів	95
4.5.1. Необмежена пластина	95
4.5.2. Необмежений циліндр	103
4.5.3. Куля	111
Питання для самоконтролю	117
РОЗДІЛ 5. ТЕПЛООБМІН В СИСТЕМАХ З ОРЕБРЕННЯМ ТА ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ	118
5.1. Теплопередача через ребристу стінку	118
5.2. Температурне поле та коефіцієнт ефективності ребер	122
5.3. Розрахунок ребер змінного перерізу	127
5.4. Ребриста стінка мінімальної маси	130
5.5. Теплопровідність пористої стінки	133
Питання для самоконтролю	140
ДОДАТОКА. Функції Бесселя	142

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

t – температура, $^{\circ}\text{C}$

Δt – перепад температур, K

τ – час, с

\vec{n}_0 – нормаль до поверхні

Q_{τ} – кількість теплоти, Дж

Q – тепловий потік, Вт

\vec{q} – густина теплового потоку, $\text{Вт}/\text{м}^2$

q_v – об'ємна густина внутрішніх джерел теплоти, $\text{Вт}/\text{м}^3$

F – площа поверхні перерізу, м^2

λ – теплопровідність матеріалу, $\text{Вт}/\text{м}\cdot\text{K}$

α – коефіцієнт тепловіддачі, $\text{Вт}/\text{м}^2\cdot\text{K}$

c – питома теплоємність $\text{Дж}/\text{кг}\cdot\text{K}$

k_B – постійна Больцмана

x, y, z – Декартові координати

r, φ, z – циліндричні координати

ВСТУП

Явище теплопровідності має велике значення в багатьох галузях сучасної техніки. Суттєву роль відіграють процеси теплопровідності в енергетиці, авіації, суднобудуванні, ракетобудуванні, промисловості та газотранспортній системі. Розрахунок енергетичних установок, робочих процесів, теплового захисту тощо повністю ґрунтується на теорії теплопровідності. Саме тому, теплопровідність є фундаментальним поняттям для майбутнього спеціаліста в галузі енергетичних систем.

В даному посібнику розглядаються типові задачі теорії теплопровідності та їх розв'язки методом розділення змінних. Теорія широко підкріплена прикладами реальних систем. Після кожного розділу є перелік питань для самоконтролю.

У першому розділі даного посібника вводяться основні поняття теорії теплопровідності; дається формулювання основних рівнянь, їх часткових випадків та умови однозначності для них.

Другий розділ присвячено розгляду стаціонарних одно- та двовимірних систем без внутрішніх джерел теплоти. Наведено розв'язки стаціонарних рівнянь теплопровідності для напівобмеженої пластини, нескінченного циліндра і кулі; розглянуто багат шарові системи; введено поняття критичної товщини шару ізоляції.

В третьому розділі мова йде про стаціонарні системи з внутрішніми джерелами теплоти. Наведено постановки задач та їх розв'язки для: суцільного стрижня з рівномірним розподілом джерел теплоти; неадіабатної пластини з циліндричним джерелом теплоти; електричних котушок.

В четвертому розділі вводяться деякі числа подібності і розглядаються нестаціонарні системи. Спочатку розглядаються часткові випадки систем з суттєво різними внутрішнім і зовнішнім тепловими опорами. Потім розглядаються загальні випадки. Дано постановки задач та їх вирішення на прикладі нескінченної нитки, пластини, циліндра та кулі.

У п'ятому розділі надано відомості про деякі способи керування інтенсивністю теплообміну. Зокрема розглянуто метод інтенсифікації теплообміну шляхом оребрення поверхонь, що зазнають теплообміну. Наведено точні розв'язки рівнянь теплопровідності для ребер простої геометрії (прямокутного), а також показано спрощені методи обрахунку, що використовуються на практиці. Також в даному розділі розглянуто теплопередачу через пористу стінку.

В додатках наведено теорію стосовно функцій Бесселя, яка необхідна для знаходження розв'язків рівнянь теплопровідності.

Курс «Теорія теплопровідності» пов'язаний з такими предметами як: «Термодинаміка», «Математичний аналіз», «Диференційні рівняння», «Рівняння математичної фізики» та є підґрунтям для вивчення дисципліни «Основи конвективного теплообміну».

Даний посібник призначений для студентів, що навчаються за спеціальністю 105 «Прикладна фізика і наноматеріали», але також буде корисним для студентів енергетичних та теплофізичних спеціальностей, аспірантів, інженерів, наукових співробітників і викладачів.

РОЗДІЛ 1. ЗАКОН ФУР'Є ТА РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

1.1. Види теплообміну

Теплообмін – вчення про самовільні незворотні процеси поширення теплоти в просторі від більш нагрітих тіл до менш нагрітих. Під процесом поширення теплоти розуміють обмін внутрішньою енергією між окремими елементами, областями середовища, що розглядається. Теплообмін розділяється на простий і складний. До простого теплообміну належать:

- теплопровідність – процес переносу теплоти структурними частинками речовини (нагрів ствола пушки, нагрів провідника по якому тече струм).
- конвекція – процес переносу теплоти потоками самої речовини в просторі з області з однією температурою в область з іншою. Розрізняють вільну і вимушену конвекцію (вільна – нагрівання рідини, повітря в кімнаті, утворення хмар; вимушена – перемішування рідини (мішалкою, ложкою, насосом і т.і.)).
- радіаційний теплообмін – процес переносу теплоти електромагнітними хвилями (сонячна радіація).

Складні види теплообміну комбінуються з простих. До складного виду теплообміну належать:

- тепловіддача – конвективний теплообмін між теплоносієм і поверхнею (теплопровідність + конвекція);
- теплопередача – передача теплоти від одного теплоносія до іншого через розділюючу стінку (теплопровідність + конвекція);
- радіаційно-конвективний теплообмін, що обумовлений випромінюванням, конвекцією та теплопровідністю одночасно.

Тепловий потік Q – величина, що характеризує зміну кількості теплоти в просторі з часом.

$$Q = \frac{\delta Q_{\tau}}{d\tau} \quad (1.1)$$

δQ_τ – зміна кількості теплоти за час $d\tau$.

Густина теплового потоку q – тепловий потік, віднесений до одиниці площі поверхні.

$$q = \frac{dQ}{dF} \quad (1.2)$$

Температурне поле $t(x, y, z, \tau)$ – сукупність миттєвих значень температур в просторі. Розрізняють стаціонарне $t(x, y, z)$ та нестаціонарне температурні поля.

Коли температура змінюється з часом від однієї точки простору до іншої, таке поле відповідає тепловому режиму теплопровідності, що не встановився, і називається нестаціонарним температурним полем. Якщо тепловий режим встановився, то температура в кожній точці поля залишається сталою в часі і таке температурне поле називається стаціонарним (рис. 1.1). В цьому випадку температура є функцією лише координат.

Температурне поле, відповідає рівнянню $t = t(x, y, z)$ і є просторовим, так як температура є функцією трьох координат. Якщо температура є функцією двох просторових координат, то поле називається двовимірним нестаціонарним, а його запис має вигляд:

$$t = t(x, y, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

Якщо температура є функцією однієї просторової координати, таке поле називається одновимірним:

$$t = t(x, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

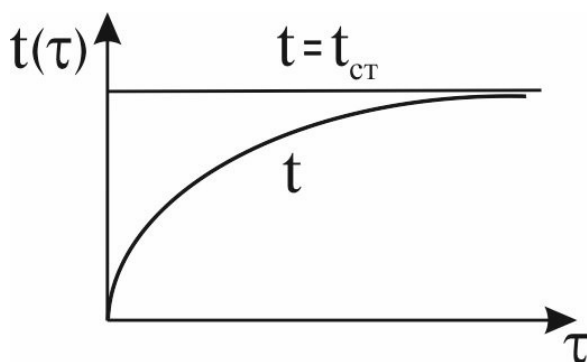


Рис. 1.1. Зміна температури з часом [1]

Поверхні, на яких температура залишається сталою, називають ізотермічними. Через кожен точку всередині тіла можна провести в даний момент часу тільки одну ізотермічну поверхню. По розташуванню ізотерм оцінюють інтенсивність зміни температури в різних напрямках: чим густіше розташовані ізотерми, тим інтенсивніше змінюється температура. Введемо поблизу точки A дві ізотерми з різницею температур Δt і відстанню вздовж нормалі Δn між ними. На рис. 1.2 зображені сліди двох різних ізотермічних поверхонь в фіксований момент часу [3].

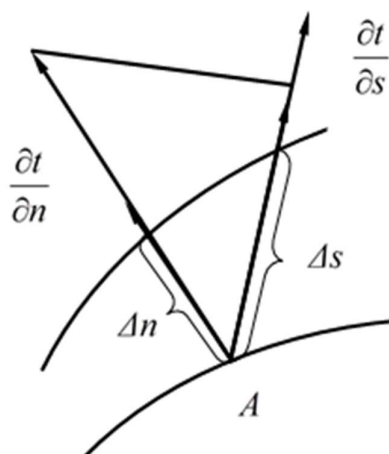


Рис. 1.2. Ізотермічні поверхні [3]

Вздовж ізотерми температура не змінюється, в будь-якому іншому напрямку змінюється, причому в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні

спостерігається найбільша зміна температури на одиницю довжини. Зростання температури в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні характеризується відношенням зміни температури Δt між вибраними ізотермами до відстані між ними по нормалі Δn . Границя цього відношення при прямуванні Δn до нуля називається градієнтом температури ($\text{grad } t$).

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} \cdot \vec{n}_0 = \frac{\partial t}{\partial n} \cdot \vec{n}_0 = \text{grad}(t), \quad (1.5)$$

де \vec{n}_0 – одиничний вектор, напрямлений по нормалі в бік зростання температури (рис. 1.2); $\partial t / \partial n$ – похідна температури по напрямку нормалі.

Інтенсивність зміни температури в напрямку s (рис. 1.2) визначається границею відношення $\partial t / \partial s$ при $\Delta s \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{\partial t}{\partial s} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} \cdot \cos(\hat{\vec{n}, \vec{s}}) = \frac{\partial t}{\partial n} \cdot \cos(\hat{\vec{n}, \vec{s}}) \quad (1.6)$$

За додатній напрямок градієнту температури приймають напрямок, в якому температура зростає. Лінії, перпендикулярні до ізотермічних поверхонь, називають лініями теплового потоку, або, коротше, лініями току.

1.2. Закон Фур'є і коефіцієнт теплопровідності

Взаємозв'язок між густиною теплового потоку \vec{q} і градієнтом температури $\vec{\nabla} t$ виражає закон Фур'є:

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} t = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \vec{n}_0, \quad (1.7)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності.

Коефіцієнт теплопровідності λ – густина потоку теплоти при градієнті температури рівному одиниці. Характеризує здатність речовини проводити теплоту.

Вектор густини теплового потоку \vec{q} направлений по нормалі до ізотермічної поверхні. Його додатній напрямок співпадає з напрямом зменшення температури, так що теплота завжди передається від більш гарячих частин тіла до холодних. Таким чином, вектори \vec{q} та $\text{grad}(t)$ лежать на одній прямій, але напрямлені в протилежні сторони. Це і пояснює наявність знаку «мінус» в правій частині рівняння (1.7).

Коефіцієнт теплопровідності λ є фізичним параметром речовини. В загальному випадку він залежить від температури, тиску та роду речовини. Діапазони зміни λ для різних матеріалів наведено на *рис. 1.3*.

Для газів, при збільшенні температури і тиску, коефіцієнт теплопровідності росте за законом:

$$\lambda = \frac{9k-5}{8} \bar{\omega}_m c_v \Delta \rho \quad (1.8)$$

де k – показник адіабати ($k = c_p/c_v$); $\bar{\omega}_m$ – середньоквадратична швидкість молекул; c_v – теплоємність газу при сталому об'ємі; Δ – довжина вільного пробігу молекул; ρ – густина газу.

При збільшенні температури рідин, їх коефіцієнт теплопровідності зменшується, крім води і гліцерину. Матеріали, для яких $\lambda < 2,5 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ називають теплоізоляторами. Неметалічні матеріали характеризуються анізотропією (властивості матеріалів в різних напрямках різні) і пористістю:

$$\lambda = \lambda_c (1 - \Pi) \quad (1.9)$$

де λ_c – коефіцієнт теплопровідності матеріалу; Π – коефіцієнт пористості матеріалу.

Метали дуже чутливі до нейтронного та γ випромінювання. Найкращими провідниками серед металів є срібло Ag та мідь Cu. відомо, що речовини, які мають хорошу електропровідність, є також хорошими теплопровідниками. Зв'язок між коефіцієнтами електропровідності та теплопровідності встановлює закон Відемана-Франца:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3e^2} k_B^2 T \quad (1.10)$$

де σ – електропровідність; e – елементарний електричний заряд; k_B – стала Больцмана; T — абсолютна температура.

Зв'язок між теплопровідністю та електропровідністю обумовлена тим, що головний внесок в ці процеси в металах дають одні й ті самі механізми – розсіяння електронів провідності. Закон Відемана-Франца в цілому справедливий при високих і низьких температурах, але може бути неточним при проміжних температурах.

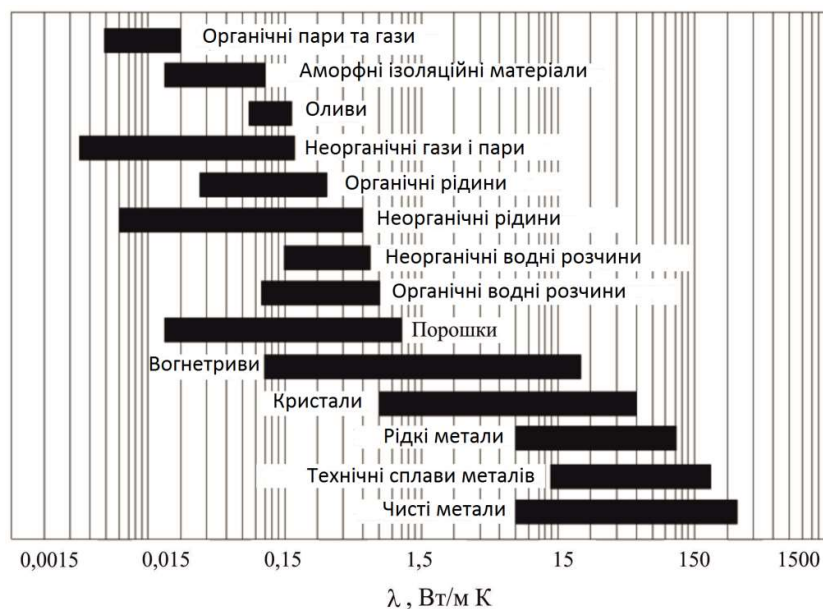


Рис. 1.3. Порядок величин та коефіцієнтів теплопровідності різних речовин

На основі уявлень сучасної фізики, явища природи взагалі і теплопровідності зокрема, можливо описати і дослідити на основі феноменологічного та статистичного методів. Метод опису процесу, що ігнорує

мікроскопічну структуру речовини, і розглядає її як суцільне середовище (континуум), називається феноменологічним. Феноменологічний метод дослідження дає можливість встановити деякі загальні співвідношення між параметрами, що характеризують досліджуване явище в цілому. Феноменологічні закони носять доволі загальний характер, а роль конкретного фізичного середовища враховується коефіцієнтами, що визначаються безпосередньо з дослідів.

Інший шлях вивчення фізичних явищ базується на дослідженні внутрішньої структури речовини. Середовище розглядається як деяка фізична система, що складається з великої кількості молекул, іонів або електронів з заданими властивостями та законами їх взаємодії. Одержання макроскопічних характеристик по заданим мікроскопічним властивостям середовища складає основну задачу статистичного методу [2].

1.3. Закон Ньютона

При конвективному теплообміні між твердим тілом та теплоносієм (*рис. 1.4*) зв'язок між густиною потоку теплоти q з температурами поверхні тіла T_w та рідини T_f встановлюється формулою Ньютона:

$$q = \alpha(T_f - T_w) \quad (1.11)$$

де T_f – температура теплоносія; T_w – температура стінки; α – коефіцієнт тепловіддачі, який може також враховувати радіаційний теплообмін.

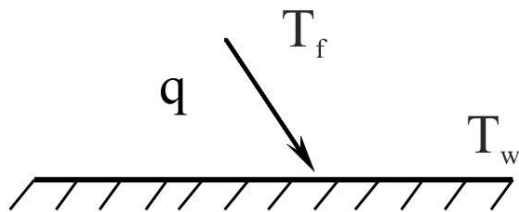


Рис. 1.4. Поверхня твердого тіла

Коефіцієнт тепловіддачі конвекцією, чисельно характеризує тепловий потік, який розсіює або поглинає одиниця поверхні твердого тіла, при різниці температур між твердим тілом та теплоносієм в один Кельвін. Одиниця вимірювання коефіцієнта тепловіддачі в системі СІ – $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$.

Коефіцієнт тепловіддачі залежить від:

- виду теплоносія та його температури;
- температурного напору, виду конвекції (вимушена, вільна) та режиму течії (ламінарна, турбулентна);
- стану поверхні (шорсткість) та напрямку обтікання;
- форми та розмірів тіла.

$$\alpha = f(t_f, \lambda, c, \rho, \mu, \bar{\omega}_m \dots) \quad (1.12)$$

Тому α – функція фізичного процесу, а не таблична величина. Визначається, як правило, експериментально з використанням рівнянь подібності. Більш детально це питання буде розглянуто в курсі «Основи конвективного теплообміну».

1.4. Диференціальне рівняння теплопровідності

Вивчення будь-якого фізичного явища зводиться до встановлення залежності між величинами, що характеризують це явище. Для складних фізичних процесів, в яких основні величини можуть суттєво змінюватись в просторі і часі, встановити залежність між цими величинами дуже складно. В цих випадках в нагоді стає метод математичної фізики, який виходить з того, що обмежується проміжок часу і з усього простору розглядається лише елементарний об'єм. Це дозволяє в межах елементарного об'єму та вибраного малого інтервалу часу, знехтувати зміною деяких величин, що характеризують процес і суттєво спростити залежність між величинами [2].

Введемо декартову систему координат в середовищі з рухомих теплоносієм і розглянемо в ній елементарний об'єм (рис.1.5) $dV = dxdydz$.

Припущення відносно властивостей середовища:

- тіло однорідне та ізотропне;
- фізичні параметри сталі ($\lambda, \rho, c = \text{const}$);
- деформація об'єму, що розглядається, яка пов'язана зі зміною температури, є дуже малою величиною в порівнянні з самим об'ємом;
- внутрішні джерела теплоти в тілі, які в загальному випадку можуть бути задані як $q_v = f(x, y, z, \tau)$, розподілені рівномірно.

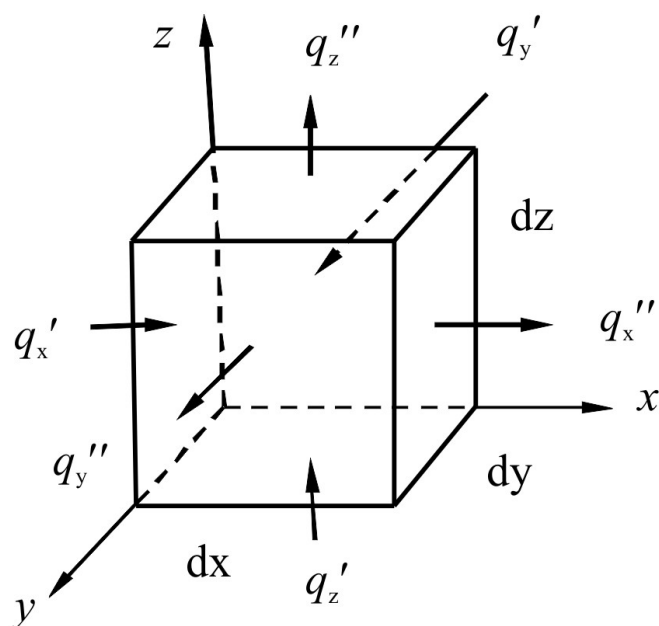


Рис. 1.5. Елементарний об'єм

Закон збереження теплоти для елементарного об'єму:

$$\delta Q_{\tau 1} + \delta Q_{\tau 2} = \delta Q_{\tau 3} \quad (1.13)$$

де $\delta Q_{\tau 1}$ – кількість теплоти, що входить в елементарний об'єм шляхом теплопровідності за час $d\tau$; $\delta Q_{\tau 2}$ – кількість теплоти, що виділилось за час $d\tau$ за

рахунок внутрішніх джерел; $\delta Q_{\tau 3}$ – зміна ентальпії в елементарному об’ємі за час $d\tau$.

Ентальпія $I(S, N, P, x_i)$ – повна енергія системи:

$$I(S, N, P, x_i) = U + PV, \quad (1.14)$$

де S – ентропія; N – число частинок в системі; P – тиск; x_i – інші макроскопічні параметри системи.

$$\delta Q_{\tau 2} = q_v dx dy dz d\tau \quad (1.15)$$

$$\delta Q_{\tau 3} = mc dt = \rho dx dy dz c dt \quad (1.16)$$

де c – питома теплоємність; ρ – густина речовини.

Розглянемо густину теплового потоку q вздовж осі x :

$$q'_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}, \quad (1.17)$$

де q'_x – густина теплового потоку, що входить в елементарний об’єм в напрямку осі x .

Густину теплового потоку q''_x , що виходить з елементарного об’єму, розкладемо в ряд Тейлора і обмежимося першими двома членами ряду:

$$q''_x = q'_x + \frac{\partial q'_x}{\partial x} dx \quad (1.18)$$

Загальну кількість теплоти, що надходить в елементарний об’єм, можна подати у вигляді:

$$\delta Q_{\tau 1} = \delta Q_{\tau x} + \delta Q_{\tau y} + \delta Q_{\tau z} \quad (1.19)$$

$$\delta Q_{\tau x} = (q'_x - q''_x) dF_{yz} d\tau \quad (1.20)$$

Підставляючи(1.18) в (1.20) отримаємо:

$$\delta Q_{\tau x} = -\frac{\partial q'_x}{\partial x} dx dF_{yz} d\tau \quad (1.21)$$

Підставляючи(1.17) в (1.21) отримаємо:

$$\delta Q_{\tau x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx dy dz d\tau \quad (1.22)$$

Аналогічно знаходимо $\delta Q_{\tau y}$ и $\delta Q_{\tau z}$:

$$\delta Q_{\tau y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) dy dx dz d\tau \quad (1.23)$$

$$\delta Q_{\tau z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) dz dx dy d\tau \quad (1.24)$$

Тоді закон збереження теплоти (1.13) для елементарного об'єму прийме вигляд:

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = q_v + \text{div} \lambda \vec{\nabla} t \quad (1.25)$$

Запишемо оператор Набла в циліндричній та сферичній системах координат (рис.1.6).

– в циліндричній системі:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

– в сферичній системі:

$$\vec{V} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

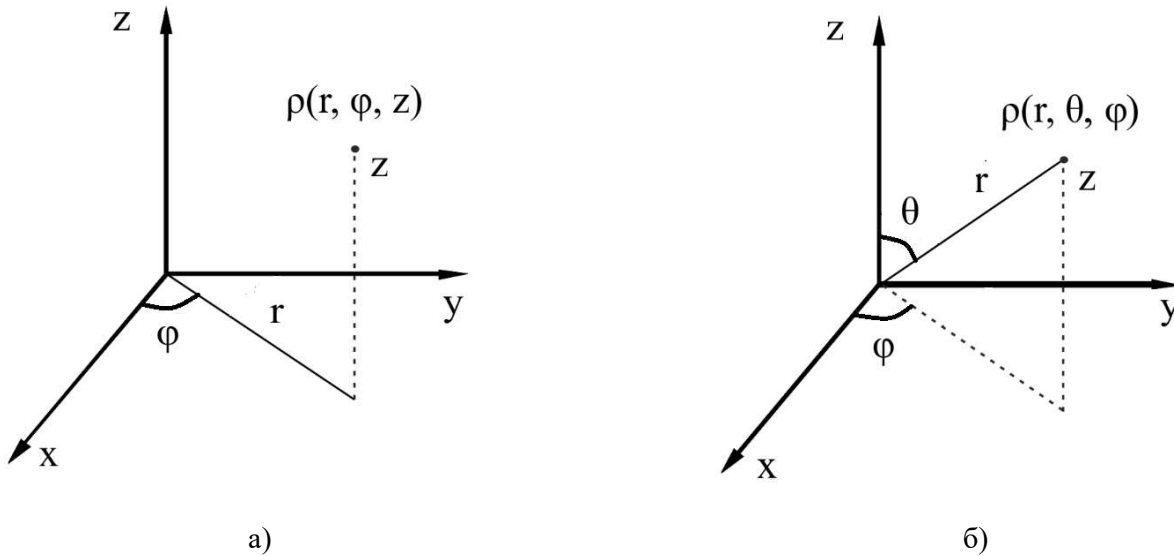


Рис. 1.6. Циліндрична (а) та сферична (б) системи координат

Сферична ортогональна система координат (r, θ, φ) . Зв'язок між Декартовими та сферичними координатами визначається формулами:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

причому $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Циліндрична ортогональна система координат (r, φ, z) . Зв'язок між Декартовими та циліндричними координатами визначається формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

причому $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty \leq z \leq \infty$.

Розглянемо часткові випадки рівняння (1.25):

1. $\lambda = \text{const}$, $q_v = 0$

$$\Delta t = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (1.26)$$

де a – коефіцієнт теплопровідності. Він характеризує швидкість зміни температури речовини в нерівноважних теплових процесах. Одиниця вимірювання коефіцієнта теплопровідності в СІ – $\text{м}^2/\text{с}$; Δ – оператор Лапласа (лапласіан).

2. $\lambda = \text{const}$, $q_v = 0$, $t \neq f(\tau)$

$$\Delta t = 0 \quad (1.27)$$

3. $\lambda = \text{const}$, $q_v = 0$, $t \neq f(\tau)$, $t = f(y, z)$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 t}{\partial^2 z} = 0 \quad (1.28)$$

Єдиність розв'язків рівнянь, наведених в часткових випадках (1 – 3), визначається з умов однозначності. Умови однозначності включають в себе:

- геометричні умови, що характеризують форму та розміри тіла, в яких протікає процес;
- фізичні умови, що характеризують властивості середовища і тіла;
- часові (початкові) умови, що характеризують розподіл температур в досліджуваному тілі в початковий момент часу;
- граничні умови, що характеризують взаємодію досліджуваного тіла з оточуючим середовищем.

Фізичними умовами задаються параметри тіла λ, c, ρ та ін. Також може бути заданий закон розподілу внутрішніх джерел теплоти.

Початкові умови необхідні при розгляді нестационарних процесів і задають закон розподілу температури всередині тіла в початковий момент часу.

Граничні умови можуть бути 1-го, 2-го та 3-го роду.

- a) Граничні умови першого роду. При цьому задається розподіл температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$t_w = f(x, y, z, \tau) \quad (1.29)$$

де t_w – температура на поверхні тіла; x, y, z – координати на поверхні тіла.

- b) Граничні умови другого роду. При цьому задаються значення теплового потоку для кожної точки поверхні тіла в будь-який момент часу. Аналітично це можна представити наступним чином:

$$q_w = q(x, y, z, \tau) \quad (1.30)$$

де q_w – густина теплового потоку на поверхні тіла.

- c) Граничні умови третього роду. При цьому задаються температура оточуючого середовища T_f та закон теплообміну між поверхнею тіла та оточуючим середовищем (α) [2].

Питання для самоконтролю

1. Які бувають види теплообміну?
2. Дайте визначення теплового потоку.
3. Дайте визначення густини теплового потоку.
4. Сформулюйте закон Фур'є.
5. Який фізичний зміст має коефіцієнт теплопровідності?
6. Сформулюйте закон Ньютона.

7. Який фізичний зміст має коефіцієнт тепловіддачі?
8. Запишіть рівняння теплопровідності у загальному випадку.
9. Наведіть часткові випадки рівняння теплопровідності.
10. Запишіть як виражається коефіцієнт температуропровідності.
11. Запишіть у декартових, циліндричних і сферичних координатах градієнт, дивергенцію та оператор Лапласа.
12. Що таке умови однозначності, які вони бувають?
13. Сформулюйте граничні умови першого, другого і третього роду.

РОЗДІЛ 2. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ І ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ БЕЗ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛОТИ

2.1. Одновимірне температурне поле

Загалом строго одновимірних систем не існує. Але дуже часто, в практично важливих випадках з доволі високою точністю систему можна вважати одновимірною, про що і піде мова в даному пункті.

2.1.1. Теплопровідність і теплопередача через плоску стінку

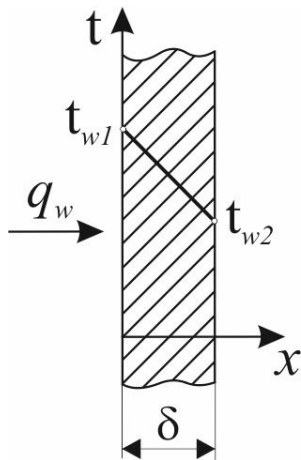


Рис. 2.1. Зміна температури по товщині однорідної плоскої стінки

Розглянемо однорідну та ізотропну стінку товщиною δ зі сталим коефіцієнтом теплопровідності λ . На зовнішніх поверхнях стінки підтримуються сталими температури t_{w1} і t_{w2} .

При заданих умовах температура буде змінюватись тільки в напрямку, перпендикулярному площині стінки. Якщо вісь Ox направити, як показано на рис. 2.1, то температура в напрямку осей Oy та Oz буде залишатися сталою, тобто:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$

В зв'язку з цим диференціальне рівняння теплопровідності для даного випадку запишеться у вигляді:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad (2.1)$$

Граничні першого родуумови в даній задачі сформулюємо наступним чином:

$$\text{при } x = 0 \quad t = t_{w_1}; \quad \text{при } x = \delta \quad t = t_{w_2} \quad (2.2)$$

Рівняння (2.1) та умови (2.2) дають повне математичне формулювання даної задачі.

В результаті розв'язку поставленої задачі повинен бути знайдений розподіл температури в пласкій стінці, тобто $t = f(x)$, та отримана формула для визначення кількості тепла, що проходить в одиницю часу через стінку.

Закон розподілу температур по товщині стінки знайдемо в результаті подвійного інтегрування рівняння (2.1).

Перше інтегрування дає:

$$\frac{dt}{dx} = C_1 \quad (2.3)$$

Після другого інтегрування отримаємо:

$$t = C_1 x + C_2 \quad (2.4)$$

З рівняння (2.4) випливає, що при сталому коефіцієнті теплопровідності температура в стінці змінюється по лінійному закону.

Сталі C_1 та C_2 в рівнянні (2.4) визначаються з граничних умов:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad t = t_{w_1} \text{ та } C_2 &= t_{w_1}; \\ \text{при } x = \delta \quad t = t_{w_2} \text{ та } C_1 &= -\frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\delta} x. \end{aligned}$$

Підставляючи значення констант C_1 і C_2 в рівняння (2.4), отримуємо закон розподілу температури в даній пласкій стінці:

$$t = t_{w_1} - \frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\delta} x \quad (2.5)$$

Оскільки густина теплового потоку визначається як

$$q_w = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=0} \quad (2.6)$$

То з урахуванням (2.3) та виразу для C_l отримаємо:

$$q_w = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w_1} - t_{w_2}) \quad (2.7)$$

З рівняння (2.7) **Error! Bookmark not defined.** можна зробити висновок, що питомий тепловий потік, що проходить за одиницю часу, прямо пропорційний теплопровідності λ , різниці температур на зовнішніх поверхнях стінки ($t_{w_1} - t_{w_2}$) та обернено пропорційний товщині стінки δ .

Відношення λ/δ , Вт/(м²·К) називають тепловою провідністю стінки, а обернену величину δ/λ , (м²·К)/Вт, – термічним опором теплопровідності стінки [3].

Використовуючи поняття термічного опору, формулу розрахунку густини теплового потоку можна представити у вигляді:

$$q_w = \frac{(t_{w_1} - t_{w_2})}{R} \quad (2.8)$$

де $R = \frac{\delta}{\lambda}$ – термічний опір теплопровідності.

Загальна кількість теплоти Q , що передається через стінку площею F за одиницю часу:

$$Q = q_w F = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w_1} - t_{w_2}) F \quad (2.9)$$

Приклад. Дана модель може, наприклад, бути застосована для розрахунку теплового потоку через віконну раму, якщо температура в приміщенні і назовні суттєво не змінюється. З певними наближеннями в цьому випадку систему можна вважати стаціонарною одновимірною. Склопакет у вікні може бути заповнений: 1) повітрям з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda=0.025 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}}$ (нормальні умови), 2) аргонном з $\lambda=0.0164 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}}$ та криптоном з $\lambda=0.0095 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}}$. Використовуючи означення термічного опору і формулу (2.8) легко бачити, що при однакових значеннях теплового потоку використання аргону дає змогу зменшити товщину склопакета більш ніж в 1.5 рази у порівнянні з повітрям, а використання криптону – більше ніж в 2.6 рази.

Теплопередача через пласку стінку. В техніці часто доводиться розраховувати стаціонарний процес переносу теплоти від одного теплоносія до другого через розділюючу стінку. Такий процес називається теплопередачою.

Розглянемо теплопередачу між двома рідинами через розділюючу їх одношарову пласку стінку (рис. 2.2). Тут передача теплоти ділиться на три процеси:

1) Спочатку теплота передається від гарячого теплоносія t_{f1} до поверхні стінки шляхом конвективного теплообміну, котрий може супроводжуватись випромінюванням. Інтенсивність процесу тепловіддачі характеризується коефіцієнтом тепловіддачі α_1 .

2) Потім теплота теплопровідністю переноситься від однієї поверхні стінки до іншої, що характеризується коефіцієнтом теплопровідності λ .

3) І, нарешті, теплота знову шляхом конвективного теплообміну передається від поверхні стінки до холодної рідини t_{f2} . Цей процес характеризується коефіцієнтом тепловіддачі α_2 .

При стаціонарному режимі густина теплового потоку у всіх трьох процесах однакова і може бути записана наступним чином:

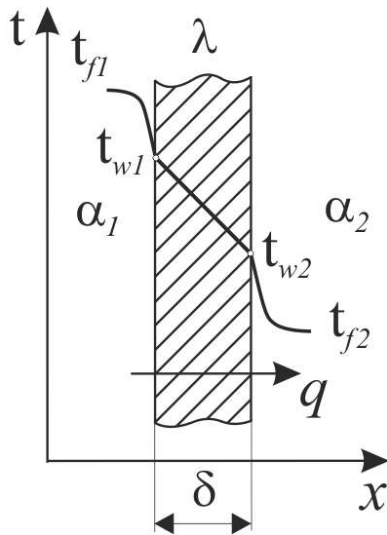


Рис. 2.2. Розподіл температури
при теплопередачі через
одношарову пласку стінку

1) по закону Ньютона:

$$q = \alpha_1(t_{f1} - t_{w1}) = \frac{1}{R_{\alpha_1}}(t_{f1} - t_{w1}) \quad (2.10)$$

2) по закону Фур'є:

$$q = \frac{\delta}{\lambda}(t_{w1} - t_{w2}) = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{R_{\lambda}} \quad (2.11)$$

3) по закону Ньютона:

$$q = \alpha_2(t_{w2} - t_{f2}) = \frac{1}{R_{\alpha_2}}(t_{w2} - t_{f2}) \quad (2.12)$$

де $R_{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1}$ та $R_{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_2}$ – термічний опір

зовнішній тепловіддачі відповідно від гарячого теплоносія до стінки і від стінки до холодного теплоносія.

З вищенаведених рівнянь складемо систему:

$$\begin{cases} t_{f1} - t_{w1} = qR_{\alpha_1} \\ t_{w1} - t_{w2} = qR_{\lambda} \\ t_{w2} - t_{f2} = qR_{\alpha_2} \end{cases} \quad (2.13)$$

додавши праві і ліві частини, отримаємо рівняння теплопередачі через одношарову пласку стінку:

$$t_{f1} - t_{f2} = q(R_{\alpha_1} + R_{\lambda} + R_{\alpha_2}) \quad (2.14)$$

або

$$q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{R_{\alpha_1} + R_{\lambda} + R_{\alpha_2}} = \frac{\Delta t}{R_k}, \quad (2.15)$$

де $\Delta t = (t_{f1} - t_{f2})$ – температурний напір, що задається умовами задачі, R_k – термічний опір теплопередачі від гарячого теплоносія до холодного.

Величина, обернена R_k , називається коефіцієнтом теплопередачі K :

$$K = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (2.16)$$

Коефіцієнт теплопередачі K характеризує інтенсивність процесу теплопередачі від гарячого теплоносія до холодного через розділюючу їх стінку [3].

Тоді рівняння теплопередачі можна записати:

$$q = K(t_{f_1} - t_{f_2}) = \frac{t_{f_1} - t_{f_2}}{R_k}$$

або

$$Q = K(t_{f_1} - t_{f_2})F \quad (2.17)$$

Граничні температури визначаються:

$$\begin{aligned} t_{w_1} &= t_{f_1} - qR_{\alpha_1} \\ t_{w_2} &= t_{f_2} - qR_{\alpha_2} \end{aligned}$$

2.1.2 Теплопровідність і теплопередача через циліндричну стінку

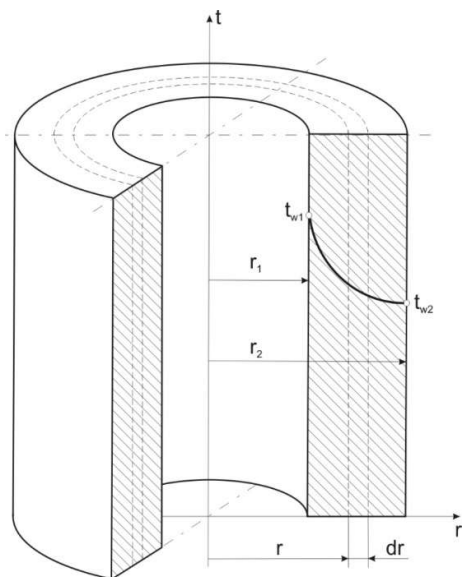


Рис. 2.3. Зміна температури по товщині одношарової циліндричної стінки

Теплопровідність через циліндричну стінку. Розглянемо стаціонарний процес теплопровідності в циліндричній стінці (трубі) з внутрішнім діаметром $d_1 = 2r_1$ та зовнішнім – $d_2 = 2r_2$ (рис. 2.3).

На поверхні стінки задані сталі температури t_{w1} и t_{w2} . В заданому інтервалі температур коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки λ є сталою величиною. Необхідно знайти розподіл температур в циліндричній стінці і тепловий потік через неї.

В даному випадку диференційне рівняння теплопровідності зручно записати в циліндричній системі координат:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \quad (2.18)$$

При цьому вісь OZ суміщу назвісью труби.

При заданих умовах температура змінюється тільки в радіальному напрямку, і температурне поле буде одновимірним. Тому

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0 \text{ та } \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0.$$

Крім того, так як температури на зовнішній та внутрішній поверхнях труби незмінні, ізотермічні поверхні є циліндричними, що мають з трубою спільну вісь. Тоді температура не повинна змінюватись також вздовж φ , тобто

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \text{ та } \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.19)$$

З урахуванням (2.19) та (2.19) рівняння (2.18) приймає вигляд:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = 0 \quad (2.20)$$

Граничні умови першого роду:

$$\text{при } r = r_1 \quad t = t_{w_1}; \text{ при } r = r_2 \quad t = t_{w_2} \quad (2.21)$$

Введемо нову змінну

$$u = \frac{dt}{dr} \quad (2.22)$$

Тоді

$$\frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{du}{dr}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{u}{r} \quad (2.23)$$

Підставляючи (2.23) в рівняння (2.20), отримаємо:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0 \quad (2.24)$$

Інтегруючи (2.24), отримаємо:

$$\ln u + \ln r = \ln C_1 \quad (2.25)$$

Потенціюючи вираз (2.25) і повертаючись до початкових змінних, отримаємо:

$$dt = C_1 \frac{dr}{r} \quad (2.26)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$t = C_1 \ln r + C_2 \quad (2.27)$$

Сталі C_1 і C_2 можна визначити, якщо в рівняння (2.27) підставити граничні умови:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_1 \quad t = t_{w_1}, \quad \text{звідки } t_{w_1} &= C_1 \ln r_1 + C_2; \\ \text{при } r = r_2 \quad t = t_{w_2}, \quad \text{звідки } t_{w_2} &= C_1 \ln r_2 + C_2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Розв'язок рівняння (2.28) відносно C_1 та C_2 дає:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}, \\ C_2 &= t_{w_1} - (t_{w_1} - t_{w_2}) \frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \end{aligned}$$

Підставив значення C_1 та C_2 в рівняння (2.27), отримаємо:

$$t = t_{w_1} - (t_{w_1} - t_{w_2}) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

або

$$t = t_{w_1} - (t_{w_1} - t_{w_2}) \frac{\ln \frac{d}{d_1}}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (2.29)$$

Отриманий вираз являє собою рівняння логарифмічної кривої. Та обставина, що розподіл температури в циліндричній стінці являється криволінійним, можна пояснити наступним. У випадку пласкої стінки питомий тепловий потік q лишається однаковим для всіх ізотермічних поверхонь. З цієї причини градієнт температури зберігає для всіх ізотермічних поверхонь сталу величину.

У випадку циліндричної стінки густина теплового потоку через будь-яку ізотермічну поверхню буде величиною змінною, так як величина поверхні залежить від радіусу.

Для знаходження кількості теплоти, що проходить через циліндричну поверхню величиною F в одиницю часу, можна скористатись законом Фур'є:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F$$

Підставляючи в рівняння закону Фур'є значення градієнта температури згідно рівняння (2.29), отримаємо:

$$Q = \frac{2\pi\lambda l(t_{w_1} - t_{w_2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (2.30)$$

Зрівняння (2.30) впливає, що кількість тепла, що проходить через циліндричну стінку в одиницю часу, повністю визначається заданими граничними умовами і не залежить від радіуса.

Тепловий потік (2.30) може бути віднесений або до одиниці довжини труби, або до одиниці внутрішньої або зовнішньої поверхні. При цьому розрахункові формули для питомих теплових потоків приймають вигляд:

$$\frac{Q}{\pi d_1 l} = q_1 = \frac{2\lambda(t_{w_1} - t_{w_2})}{d_1 \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(тепловий потік через одиницю внутрішньої поверхні);

$$\frac{Q}{\pi d_2 l} = q_2 = \frac{2\lambda(t_{w1} - t_{w2})}{d_2 \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(тепловий потік через одиницю зовнішньої поверхні);

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{\pi(t_{w1} - t_{w2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(потік тепла, що проходить через одиницю довжини труби).

Тепловий потік, віднесений до одиниці довжини труби, має розмірність Вт/м і називається лінійною густиною теплового потоку [2].

Теплопередача через циліндричну стінку. Розглянемо однорідну циліндричну стінку (трубу) зі сталим коефіцієнтом λ (рис. 2.4).

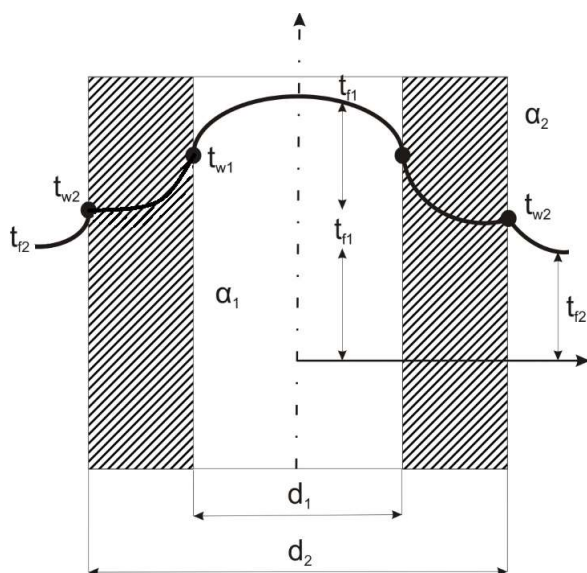


Рис. 2.4. Розподіл температур по товщині циліндричної стінки

Дано постійні температури рухомих середовищ t_{f1} та t_{f2} і сталі значення коефіцієнтів тепловіддачі на внутрішній та зовнішній поверхнях труби α_1 та α_2 . Вважатимемо, що довжина труби велика по відношенню до товщини стінки.

Тоді втратами тепла з торців труби можна знехтувати і при тепловому режимі, що встановився, кількість тепла, що буде віддаватись

від гарячого середовища до поверхні стінки, проходити через стінку і віддаватись від стінки до холодної рідини, буде одним і тим самим. Відповідно, можна записати три рівняння:

$$\begin{aligned} q_l &= \alpha_1 \pi d_1 (t_{f_1} - t_{w_1}); \\ q_l &= \frac{\pi(t_{w_1} - t_{w_2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2}}; \\ q_l &= \alpha_2 \pi d_2 (t_{w_2} - t_{f_2}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Перепишемо ці рівняння наступним чином:

$$\begin{cases} (t_{f_1} - t_{w_1}) = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ (t_{w_1} - t_{w_2}) = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2}; \\ (t_{w_2} - t_{f_2}) = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Додаючи рівняння системи (2.32), отримуємо повний температурний напір:

$$t_{f_1} - t_{f_2} = \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)$$

Звідси випливає:

$$q_l = \frac{\pi(t_{f_1} - t_{f_2})}{\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)} \quad (2.33)$$

Позначимо

$$k_l = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)} \quad (2.34)$$

Величина k_l називається лінійним коефіцієнтом теплопередачі. Вона характеризує інтенсивність передачі тепла від одного рухомого середовища до іншого через стінку, що їх розділює. Величина k_l чисельно дорівнює кількості тепла, що проходить через стінку труби довжиною в 1 м в одиницю часу від одного середовища до іншого при різниці температур між ними в 1°C .

Величина $R_l = \frac{1}{k_l}$, обернена до коефіцієнта теплопередачі, називається лінійним термічним опором теплопередачі [2]. Вона дорівнює:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \quad (2.35)$$

2.1.3 Теплопровідність і теплопередача через сферичну стінку

Нерідко в техніці зустрічаються випадки, коли стінку апарату можна наближено вважати сферичною. Як приклад можна навести деякі типи балонів, котли тощо. Важливо знати закони теплопередачі в таких системах і в деяких випадках температурне поле сферичної стінки можна вважати одновимірним.

Теплопровідність через сферичну стінку. Нехай маємо порожнисту кулю з радіусами r_1 та r_2 і сталим коефіцієнтом теплопровідності λ . При заданих рівномірно розподілених температурах на поверхнях кулі t_{w1} і t_{w2} , температура буде змінюватись тільки в напрямку радіуса.

В цьому випадку, для отримання кривої температурного поля і кількості тепла, що передається через сферичну стінку, можна скористатись законом Фур'є:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dt}{dr} \quad (2.37)$$

Якщо проінтегрувати вираз (2.37) і визначити сталу інтегрування з граничних умов: при $r = r_1$ $t = t_{w1}$; при $r = r_2$ $t = t_{w2}$, отримаємо:

$$Q = \frac{4\pi\lambda(t_{w1} - t_{w2})}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{2\pi\lambda\Delta t}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} = \pi\lambda \frac{d_1 d_2}{\delta} \Delta t,$$

$$t = t_{w_1} - \frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d} \right). \quad (2.38)$$

Ці рівняння є розрахунковими формулами теплопровідності сферичної стінки. З рівняння (2.38) слідує, що при постійному λ температура в сферичній стінці змінюється по закону гіперболи.

Теплопередача через сферичну стінку. При заданих граничних умовах третього роду, крім r_1 та r_2 , будуть відомі t_{f1} та t_{f2} , а також коефіцієнти тепловіддачі на поверхні сферичних стінок α_1 і α_2 . Величини t_{f1} і t_{f2} , α_1 і α_2 вважаються сталими в часі, а α_1 і α_2 – й по поверхням.

Оскільки процес стаціонарний і повний тепловий потік буде постійним для всіх ізотермічних поверхонь, то можна записати:

$$Q = \alpha_1 \pi d_1^2 (t_{f_1} - t_{w_1})$$

$$Q = \frac{2\pi\lambda}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} (t_{w_1} - t_{w_2})$$

$$Q = \alpha_2 \pi d_2^2 (t_{w_2} - t_{f_2})$$

З цього слідує, що:

$$Q = \frac{\pi(t_{f_1} - t_{f_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = \pi K_c (t_{f_1} - t_{f_2}) \quad (2.39)$$

Величина

$$K_c = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}}$$

називається коефіцієнтом теплопередачі сферичної стінки.

Обернена величина

$$\frac{1}{K_c} = R_c = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}$$

називається термічним опором теплопередачі сферичної стінки.

Як і у випадку з циліндричною стінкою виникає ситуація, що характеризує критичну товщину теплоізоляції для сферичної стінки:

$$d_{кр} = \frac{4\lambda_{из}}{\alpha_2}$$

$$\lambda_{из} < \frac{\alpha_2 d_{кр}}{4}.$$

Таким чином, для сферичної стінки коефіцієнт теплопровідності матеріалу ізоляції повинен бути вдвічі менше, ніж для циліндричної стінки при однакових інших параметрах [2].

2.1.4 Теплопровідність і теплопередача через багат шарову пласку стінку.

Аналогія з ланцюгами електричного струму

Теплопровідність через послідовну багат шарову пласку стінку.

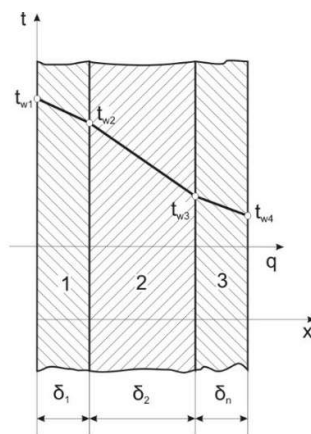


Рис. 2.5. Розподіл температур по товщині багат шарової пласкої стінки

Розглянемо багат шарову пласку стінку з товщинами шарів $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ і відповідними коефіцієнтами теплопровідності $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (рис. 2.5). Тут шари щільно прилягають один до одного. В цьому випадку густина теплового потоку визначається по формулі:

$$q = \frac{t_{w1} - t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} = \frac{\Delta t}{\sum_{i=1}^n R_{\lambda_i}} \quad (2.40)$$

де n – число шарів багат шарової стінки; t_{w1} та $t_{w(n+1)}$ – температури на зовнішніх границях багат шарової стінки; $\sum_{i=1}^n R_{\lambda_i}$ – повний термічний опір багат шарової пласкої стінки.

Густина теплового потоку, що проходить через всі шари, в стаціонарному режимі однакова. А так як коефіцієнт теплопровідності λ_i різний, то для пласкої багат шарової стінки розподіл температур являє собою ламану лінію.

Розрахувавши тепловий потік через багат шарову стінку, можна знайти температуру на границі будь-якого шару. Для k -го шару можна записати:

$$t_{w(k+1)} = t_{w1} - q \sum_{i=1}^k R_{\lambda_i} \quad (2.41)$$

Приклад. Нехай стінка пічки складається з внутрішнього шару нержавіючої сталі, товщиною 1,2 см, що вкрита зовнішнім шаром азбестової ізоляції товщиною 5 см. Температура внутрішньої поверхні нержавіючої сталі дорівнює 800 К, а температура зовнішньої поверхні азбесту дорівнює 350 К. Потрібно знайти густину теплового потоку через стінку. Коефіцієнти теплопровідності для сталі і азбесту дорівнюють відповідно $\lambda_1 = 19$ Вт/(м·К) і $\lambda_2 = 0,7$ Вт/(м·К).

Розв'язок:

Використовуючи формулу (2.38) знайдемо тепловий потік: $Q = \frac{(T_1 - T_2)F}{\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}\right)}$.

Звідси густина теплового потоку $q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}\right)} = \frac{800}{\frac{0,012}{19} + \frac{0,05}{0,7}} = 6245 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

Теплопередача через багат шарову послідовну пласку стінку. Аналогічно однорідній пласкій стінці густина теплового потоку через багат шарову пласку стінку (рис. 2.6) може бути записана наступним чином:

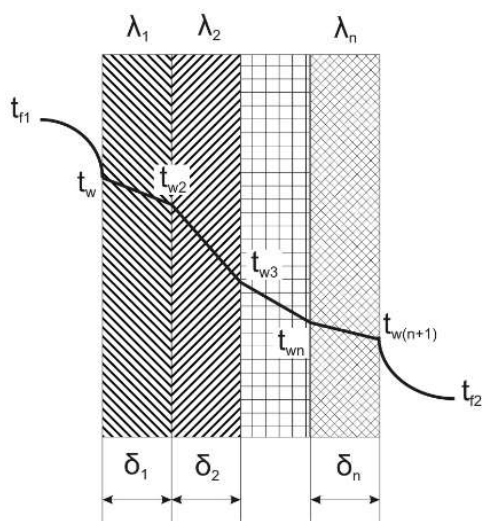


Рис. 2.6. Розподіл температур при теплопередачі через багатошарову пласку стінку

З вищенаведених рівнянь отримаємо рівняння теплопередачі через багатошарову пласку стінку:

$$q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{R_{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n R_{\lambda_i} + R_{\alpha_2}} = \frac{\Delta t}{R_k} \quad (2.42)$$

де $\Delta t = (t_{f1} - t_{f2})$ – температурний напір, заданий умовами задачі; R_k – термічний опір теплопередачі від гарячого теплоносія до холодного [2]. Якщо вважати, що тепловий потік аналогічний до електричного струму, то $(\delta/\lambda F)$ можна розглядати, як опір, а різницю температур – як аналог різниці потенціалів. Бачимо, що співвідношення (2.42) має форму, аналогічну до закону Ома.

Величина, обернена R_k , називається коефіцієнтом теплопередачі K :

$$K = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (2.43)$$

Приклад. Теплообмінник пар-рідина з площею зовнішньої поверхні 3200 см² виготовлений з шару нікелю товщиною 0,635 см і вкритий зі сторони пару

шаром міді товщиною 0,12 см. Опір шару накипу води з боку пару становить $r_T=0,00176$ (м² К)/Вт, а коефіцієнти тепловіддачі від пару до стінки і від стінки до рідини відповідно дорівнюють 5465 і 614 Вт/(м² К). Гріючий пар має температуру 110°C, а підігріта рідина температуру 74°C. Визначити загальну теплопередачу від пару до рідини. Коефіцієнти теплопровідності міді і нікелю дорівнюють відповідно 388 і 59 Вт/(м К).

Розв'язок:

Коефіцієнт теплопередачі визначимо за формулою:

$$K = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + r_T + \sum_{i=1}^2 \frac{\delta_i}{\lambda_i}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{5460} + \frac{1}{614} + 0,00176 + \frac{0,0012}{388} + \frac{0,00635}{59}}$$

$$= 272 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{ К}}$$

Тепловий потік через стінку заданої площі буде: $Q=272 \cdot 0,32 \cdot (110-74)=3,1$ кВт.

Теплопровідність через плоску стінку з паралельних секцій. Електричну аналогію можна застосувати і для розв'язання більш складних задач. Наприклад, для багат шарових стінок, матеріали яких розташовані паралельно один одному. На *Рис.2.7.* зображена плита, що складається з двох матеріалів, розташованих паралельно один одному, з площами поперечного перерізу відповідно F_1 і F_2 . З правого боку на цьому ж рисунку представлений відповідний тепловий ланцюг. Щоб розв'язати цю задачу при заданій зміні температур поперек плити, кожен шар можна розглядати окремо за умови, що для кожної з двох секцій перенос тепла можна вважати одновимірним.

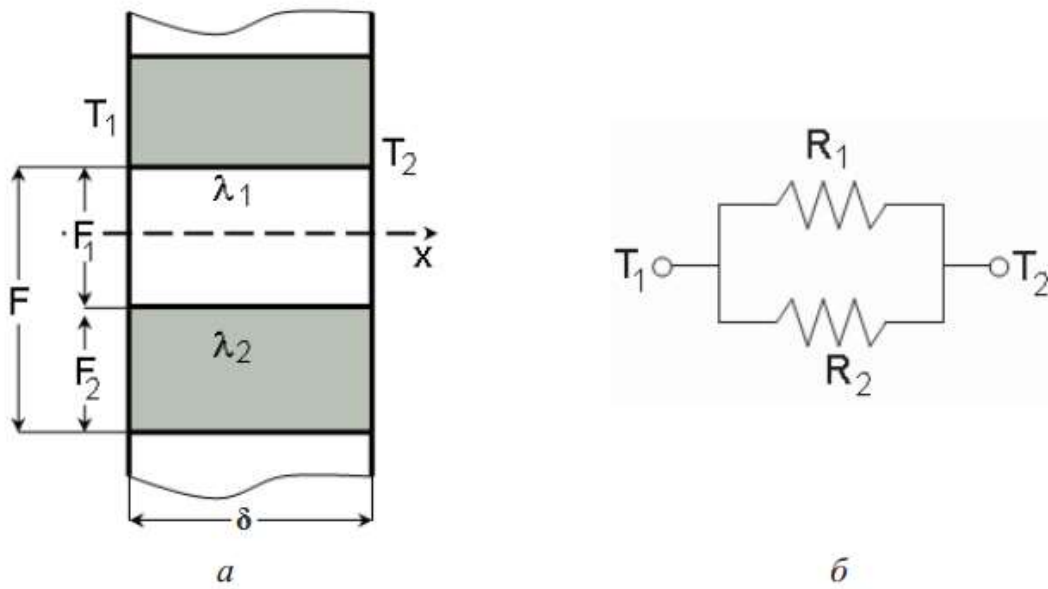


Рис. 2.7. Теплопровідність через пласку стінку з двох паралельних секцій. а) – принципова схема, б) - тепловий ланцюг

Якщо різниця температур між матеріалами, що контактують, мала, то тепловий потік вздовж шарів буде набагато більше теплового потоку у поперечному напрямку. Тому задачу можна вважати одновимірною без будь-якої серйозної втрати точності. Так як теплові потоки для різних матеріалів можна розглядати окремо, то загальний потік буде являти собою арифметичну суму:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta}{\lambda_1 F_1}} + \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta}{\lambda_2 F_2}} = \left(\frac{1}{R_{\lambda_1}} + \frac{1}{R_{\lambda_2}} \right) (t_1 - t_2).$$

Тепловим ланцюгом для цієї задачі є паралельне з'єднання двох термічних опорів R_{λ_1} та R_{λ_2} .

У загальному випадку, при довільній кількості паралельних стінок, повний потік визначатиметься як:

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta}{\lambda_i F_i}} = \sum_i \frac{\Delta t}{R_{\lambda_i}} \quad (2.44)$$

Зазначимо, що загальна площа, яку перетинає тепловий потік, дорівнює сумі всіх окремих площ і що обернена величина сумарного термічного опору дорівнює сумі обернених величин окремих термічних опорів.

Теплопровідність через пласку стінку з послідовно і паралельно з'єднаними секціями. Більш складним прикладом використання поняття теплових опорів є задача про передачу тепла через комбіновану стінку, яка повинна бути представлена за допомогою послідовно і паралельно з'єднаних термічних опорів (Рис.2.8).

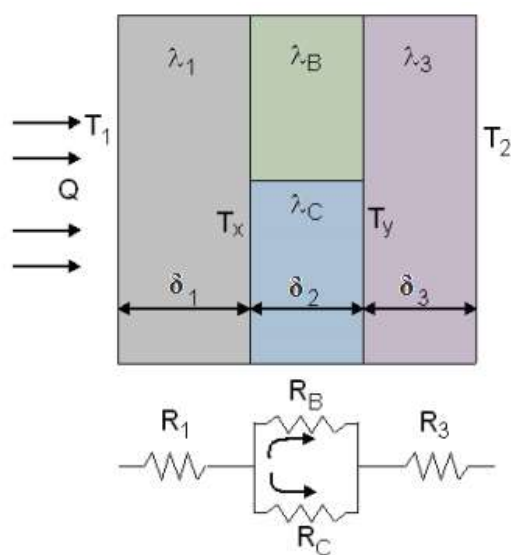


Рис.2.8. Тепловий ланцюг з паралельно і послідовно з'єднаними термічними опорами.

Для такої системи термічний опір середнього шару задається формулою:

$$R_{\lambda_2} = \frac{R_{\lambda B} R_{\lambda C}}{R_{\lambda B} + R_{\lambda C}} \quad (2.45)$$

Тепловий потік визначається наступним чином:

$$Q = \frac{\Delta t}{\sum_{n=1}^N R_{\lambda n}}, \quad (2.46)$$

де N – кількість шарів, $R_{\lambda i}$ – термічний опір кожного шару, Δt – різниця температур зовнішніх поверхонь:

$$\begin{cases} R_{\lambda_1} = \frac{\delta_1}{\lambda_1 F_1} \\ R_{\lambda_3} = \frac{\delta_3}{\lambda_3 F_3} \\ R_{\lambda_B} = \frac{\delta_2}{\lambda_B F_B} \\ R_{\lambda_C} = \frac{\delta_2}{\lambda_C F_C} \end{cases} \quad (2.47)$$

В цій задачі також вважають, що потік тепла є одновимірним. Якщо термічний опір $R_{\lambda B}$ і $R_{\lambda C}$ сильно відрізняються одне від одного, то можуть з'явитися суттєві двовимірні ефекти [5].

Приклад. Прикладом для теплопровідності через комбіновану стінку з послідовно і паралельно з'єднаними секціями може бути кріплення деяких деталей до шасі за допомогою болту (рис.2.9 а). В цьому випадку корпус деталі електрично ізольований від шасі шайбами 2 і 4 з електроізоляційних матеріалів, які одночасно є теплоізоляцією.

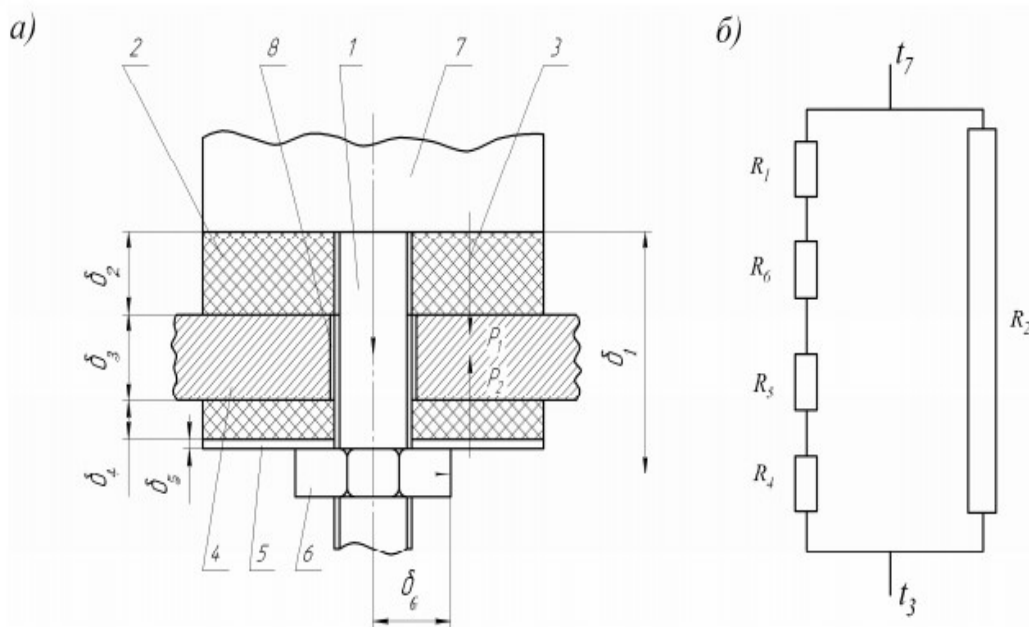


Рис. 2.9. Приклад складного з'єднання стінок. а) – принципова схема, б) – тепловий ланцюг

Болт 1 відділений від шасі повітряним шаром 8, тому теплообмін між болтом і шасі майже відсутній. Тепло від деталі до шасі доходить двома тепловими потоками Q_1 і Q_2 . Потік Q_1 проходить безпосередньо через ізоляцію 2, потік Q_2 – більш складним шляхом: від деталі 7 через болт 1, гайку 6, шайбу 5 та шар ізоляції 4.

На рис.2.9 а шляхи теплових потоків позначені стрілочками. У даному випадку теплові потоки Q_1 і Q_2 рухаються паралельно, долаючи тепловий опір R_2 ділянки 2 і тепловий опір декількох послідовно з'єднаних елементів. На рис.2.9 б представлена загальна схема з'єднання теплових опорів для цього випадку. Якщо припустити, що тепловий потік, що проходить через окремі ділянки системи, не розсіюється, то результативний тепловий опір R_k закріпленого з'єднання знайдемо на основі закону Кірхгофа, а саме:

$$R_k = \frac{R_{\lambda_2} R_{\lambda'}'}{R_{\lambda_2} + R_{\lambda'}} \quad (2.48)$$

$$R_{\lambda_2} = \frac{\delta_2}{\lambda_2 F_2}, \quad (2.49)$$

$$R_{\lambda}' = \frac{\delta_1}{\lambda_1 F_1} + \frac{\delta_4}{\lambda_4 F_4} + \frac{\delta_5}{\lambda_5 F_5} + \frac{\delta_6}{\lambda_6 F_6}, \quad (2.50)$$

Параметри δ_6 і F_6 у даному прикладі досить умовні, наближені методи їх визначення встановлюються в кожному конкретному випадку.

Ще одним важливим випадком застосування комбінованих багатошарових стінок є будівництво. На *рис. 2.10* зображено тришарову стінку з теплоізоляційним шаром і зв'язками між шарами.

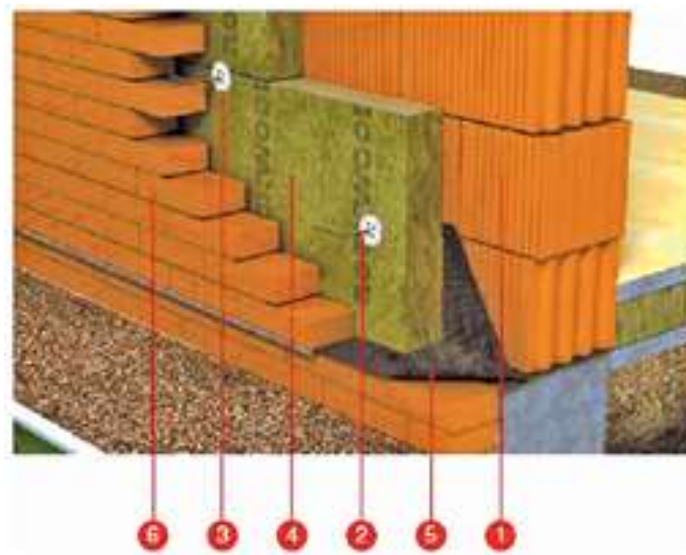


Рис. 2.10. Загальний вигляд утеплення з облицювальним шаром цегли: 1 – внутрішня стінка тришарової стінки; 2 – металеві або склопластикові зв'язки; 3 – притискальна шайба; 4 – теплоізоляційні плити; 5 – гідроізоляція; 6 – зовнішня стінка тришарової стінки.

2.1.5 Теплопровідність і теплопередача через багатошаровий циліндр

Теплопровідність через циліндричну багатошарову стінку. Аналогічно пласкій багатошаровій стінці важливим випадком також є багатошарова циліндрична стінка. Розглянемо теплопровідність такої стінки, що складається з n однорідних шарів. Вважатимемо, що контакт між шарами ідеальний і температура на поверхнях сусідніх шарів, що дотикаються однакова. Задані температури на зовнішніх поверхнях стінки, коефіцієнти теплопровідності і товщина шарів.

Для даного випадку можна скласти наступну систему рівнянь:

$$q_l = \frac{\pi(t_{w_1} - t_{w_2})}{\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}};$$

$$q_l = \frac{\pi(t_{w_2} - t_{w_3})}{\frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}};$$

.....

$$q_l = \frac{\pi(t_{w_n} - t_{w_{n+1}})}{\frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{d_{n+1}}{d_n}}.$$

В цьому випадку лінійна густина теплового потоку визначається по формулі:

$$q_l = \frac{\pi(t_{w_1} - t_{w_{n+1}})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}. \quad (2.51)$$

Величина $\frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}$ має розмірність м·К/Вт і називається лінійним термічним опором окремого шару, а величина

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}$$

являє собою термічний опір всіх шарів і називається повним лінійним термічним опором теплопровідності багат шарової стінки [2].

Теплопередача через багат шарову циліндричну стінку. У випадку теплопередачі через багат шарову циліндричну стінку система рівностей (2.51) має бути заміненa системою, що враховує опір теплопровідності всіх шарів, тобто

$$\begin{aligned} t_{f_1} - t_{w_1} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ t_{w_1} - t_{w_2} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}; \\ &\dots\dots\dots \\ t_{w_n} - t_{w_{n+1}} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{d_{n+1}}{d_n}; \\ t_{w_{n+1}} - t_{f_2} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Після додавання рівностей (2.52) і розв’язання відносно q_l отримаємо:

$$q_l = \frac{\pi(t_{f_1} - t_{f_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}} = \frac{\pi \Delta T}{R_l} = \pi K_l \Delta T \quad (2.53)$$

Величина

$$\frac{1}{K_l} = R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}} \quad (2.54)$$

Називається повним термічним опором багат шарової циліндричної стінки [2].

Типовим прикладом багат шарової циліндричної стінки є труба, по якій тече теплоносії, покрита теплоізоляцією.

2.1.6 Критична товщина теплової ізоляції

Розглянемо трубу, з накладеною на неї ізоляцією (*рис. 2.11*) і дослідимо тепловий потік через бокову поверхню шару ізоляції як функцію зовнішнього діаметру ізолюючого шару.

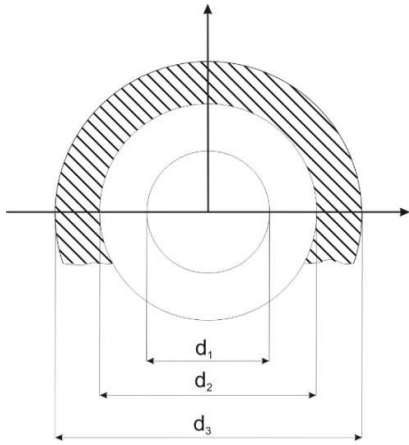


Рис. 2.11. Труба з ізоляційним шаром

Термічний опір теплопередачі для такої труби запишемо:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{i3}} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}.$$

Для того щоб з'ясувати, як буде змінюватись величина R_l при збільшенні товщини шару ізоляції, дослідимо R_l як функцію d_3 . Візьмемо похідну від R_l по d_3 і прирівняємо до нуля:

$$\frac{\partial R_l}{\partial d_3} = \frac{1}{2\lambda_{i3} d_3} - \frac{1}{\alpha_2 d_3^2} = 0$$

Значення d_3 з останнього виразу відповідає точці екстремуму кривої $R_l = f(d_3)$. Точці екстремуму відповідає значення діаметру ізоляції рівне $d_{кр} = \frac{2\lambda_{i3}}{\alpha_2}$. Продиференціювавши ще раз термічний опір по d_3 і підставивши екстремальне значення отримаємо:

$$\left. \frac{\partial^2 R_l}{\partial d_3^2} \right|_{d_{кр}} = \frac{1}{d_{кр}} \left(\frac{2}{\alpha_2 d_{кр}} - \frac{1}{2\lambda_{i3}} \right) \Big|_{d_{кр}} = \frac{\alpha_2^2}{8\lambda_{i3}^3} > 0$$

Так як всі величини, що входять в цей вираз, додатні, сама величина також додатна, а значить, значення $d_{кр}$ відповідає мінімальному значенню термічного опору теплопередачі. Тепловий потік при цьому буде максимальним (рис. 2.12). Тобто, зі збільшенням товщини теплової ізоляції тепловий потік через бокову поверхню ізоляції змінюється немонотонно. Цей, неочевидний, на перший погляд, факт пояснюється тим, що тепловий опір теплопередачі складається з двох конкуруючих факторів. Збільшення товщини шару ізоляції призводить до зменшення теплопровідності, але, в той же час, збільшується зовнішня площа

поверхні, що веде до інтенсифікації тепловіддачі. Сумарна дія цих факторів в результаті і призводить до функції з мінімумом.

Значення зовнішнього діаметра труби, що відповідає мінімальному повному термічному опору теплопередачі, називається критичним діаметром і позначається $d_{кр}$. Розраховується критичний діаметр по формулі

$$d_{кр} = \frac{2\lambda_{i3}}{\alpha_2} \quad (2.55)$$

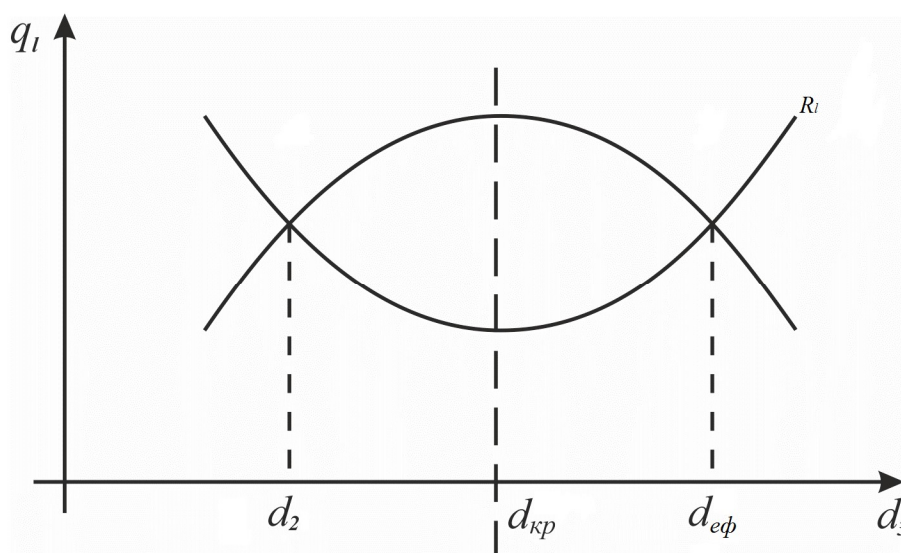


Рис. 2.12. Графік залежності q_l від d_3

Поняття критичного діаметра необхідно при виборі матеріалу ізоляції. Якщо з'ясується, що для певного матеріалу ізоляції критичний діаметр ізоляції більше ніж діаметр самої труби, то сенсу в такій ізоляції нема. На рис. 2.12 як раз зображена така ситуація. Видно, що при діаметрі труби, рівному d_2 , шар ізоляції з зовнішнім діаметром від d_2 до $d_{кр}$ призводить тільки к зростанню теплового потоку (відповідно і втрат). Починаючи з діаметра $d_{кр}$ тепловий потік починає зменшуватись і, при досягненні значення $d_{кр}$, стає рівним потоку для труби без ізоляції. Очевидно, що при виборі матеріалу ізоляції необхідно спочатку розрахувати критичний діаметр і переконатись, що він менший за зовнішній діаметр труби.

Приклад. Трубу з зовнішнім діаметром 30 мм необхідно покрити шаром теплоізоляції. Можливими варіантами є мінеральна вата, з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_{\text{в}}=0,04 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$, і азбест, з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_{\text{аз}}=0,1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$. Коефіцієнт тепловіддачі в зовнішнє середовище в обох випадках $\alpha_2=5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}$. Який матеріал доцільніше вибрати в якості теплоізолятора?

Розв'язок.

Критичний діаметр ізоляції:

$$d_{\text{кр}}^{\text{в}} = \frac{2\lambda_{\text{в}}}{\alpha_2} = \frac{2\cdot 0,04}{5} = 0,016 \text{ м} = 16 \text{ мм для мінеральної вати}$$

$$d_{\text{кр}}^{\text{аз}} = \frac{2\lambda_{\text{аз}}}{\alpha_2} = \frac{2\cdot 0,1}{5} = 0,04 \text{ м} = 40 \text{ мм для азбесту.}$$

Отже, в даному випадку азбест якості матеріалу ізоляції використовувати недоцільно, так як для нього критичний діаметр більше ніж діаметр труби. Натомість мінеральна вата є непоганим варіантом.

2.2. Двовимірне температурне поле

Розглянемо системи, де тепло розповсюджується в двох напрямках.

2.2.1. Двовимірне температурне поле в напівобмеженій адіабатній пластині

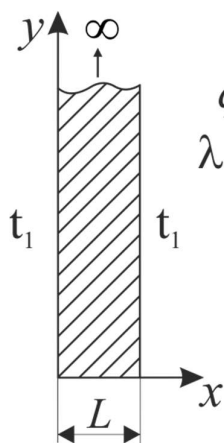


Рис. 2.13. Напівобмежена
пластина

$$q_v = 0$$

$$\lambda = \text{const}$$

Розглянемо суцільну пласку пластину, що не має внутрішніх джерел тепла і розташовану в першому квадранті координатної площини (X, Y) . Границі пластини: $x = 0, x = L, y = 0, y = \infty$ (рис. 2.13)

Таке тіло називають напівобмеженим, так як один з його розмірів необмежений. Нехай на трьох краях пластини $x = 0, x = L, y = \infty$ підтримується стала температура t_1 , вздовж четвертого краю

$y=0$ —сталий в часі довільний розподіл температури $t = f(x)$. Так як вважається, що пластина відносно тонка, то температурним градієнтом $\frac{dt}{dz}$ можна знехтувати, і, таким чином, температурне поле стає двовимірним [1].

Якщо коефіцієнт теплопровідності пластини сталий ($\lambda = \text{const}$), а її поверхні ідеально ізолювані від теплообміну з оточуючим середовищем ($q_v = 0$), то температурне поле такої пластини має задовольняти рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (2.56)$$

при граничних умовах:

$$\begin{cases} x = 0, & t = t_1 \\ x = L, & t_1 = t \\ y \rightarrow \infty, & t = t_1 \\ y = 0, & t = f(x) \end{cases} \quad (2.57)$$

Дана задача є частковим випадком задачі Штурма-Ліувілля. Введемо змінну $T = t - t_1$, рівняння (2.56) набуває вигляду $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$. Тоді нові граничні умови будуть:

$$\begin{cases} x = 0, & T = 0 \\ x = L, & T = 0 \\ y \rightarrow \infty, & T = 0 \\ y = 0, & T = f(x) - t_1 = \Phi(x) \end{cases}$$

Для розв'язку даного рівняння скористаємось методом розділення змінних. Вважатимемо, що розв'язок для $T(x, y)$ має вигляд $T = XY$, де $X = X(x)$ і $Y = Y(y)$. Тоді рівняння (2.56) можна записати у вигляді:

$$X''_x Y + Y''_y X = 0, \text{ або, поділивши на } XY, \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

Перенесемо всі функції, що залежать від X вліво, а всі функції, що залежать від Y – вправо. Отримаємо: $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$. Але так як функції в лівій і правій частині залежать від різних змінних, їх рівність можлива тільки в тому випадку, якщо і

ліва і права частина рівна деякій константі, яку для зручності позначимо $-\mu^2$.

Отримаємо: $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\mu^2$. Це рівняння еквівалентно системі:

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0 \\ Y'' - \mu^2 Y = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

Таким чином, ми перейшли від рівняння в часткових похідних до системи 2-х звичайних диференціальних рівнянь.

Загальним розв'язком першого рівняння системи (2.58) є суперпозиція гармонічних функцій, а другого – експонент:

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x \\ Y(y) = C_3 e^{\mu y} + C_4 e^{-\mu y} \end{cases}$$

Для того, щоб розв'язок задовольняв першу граничну умову, тобто при $x = 0$, $T = 0$ має виконуватись $C_1 = 0$. Аналогічно, при $y \rightarrow \infty$; $T = 0$; $C_3 = 0$. Відповідно, загальний розв'язок можна записати у вигляді:

$$T = C_2 \sin \mu x \cdot C_4 e^{-\mu y} = C e^{-\mu y} \sin \mu x$$

Для того, щоб розв'язок задовольняв ще одній граничній умові, тобто при $x = L$, $T = 0$, запишемо рівність $0 = C e^{-\mu y} \sin \mu L$. Так як $C \neq 0$, отримаємо $\sin \mu L = 0$, що може виконуватись тільки в тому випадку, якщо для μ виконується рівність: $\mu L = \pi n$, $n \in Z_+$ або $\mu_n = \frac{\pi n}{L}$.

Кожному з послідовних значень n відповідає частковий розв'язок, а кожному частковому розв'язку відповідає своє значення сталої C . Загальний розв'язок отримуємо, як суму часткових розв'язків для всіх послідовних цілих додатних значень n :

$$T_n = C_n \sin \frac{\pi n}{L} x \cdot e^{\frac{-\pi n}{L} y}$$

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right) e^{\frac{-\pi n}{L} y} \quad (2.59)$$

Таке сумування припустиме, оскільки розв'язок однорідного диференціального рівняння в часткових похідних також являє собою суму розв'язків при умові, що отриманий ряд є почленно диференційовним.

Для того щоб рівняння (2.59) задовольняло останній граничній умові при $y = 0$, $T = \Phi(x)$, необхідно щоб:

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right)$$

Ця рівність є розкладом довільної функції $\Phi(x)$ в нескінченний ряд Фур'є по синусам. Знаходимо його коефіцієнти:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(x) \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right) dx$$

Обидві сталі інтегрування μ і C повністю визначені, і розв'язок приймає вигляд:

$$T = t - t_1 = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right) e^{\frac{-\pi n}{L} y} \int_0^L \Phi(x) \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right) dx, \quad (2.60)$$

де $\Phi(x) = f(x) - t_1$ [2].

Для того, щоб вираз (2.60) був розв'язком рівняння (2.56) з граничними умовами (2.57), ряд має збігатися і бути двічі почленно диференційовним по x та по y . Покажемо, що ряди з похідних збігаються рівномірно, для цього покажемо збіжність мажорантного ряду. Покладемо, що $|\Phi(x)| < M$ обмежене в заданій

області. Оскільки $|\sin x| < 1$, то $|C_n| < 2M$. Продиференціювавши двічі T_n по x та y отримаємо:

$$a_n = \left| \frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 n^2 e^{-\frac{\pi n}{L} y} \text{ та } b_n = \left| \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 n^2 e^{-\frac{\pi n}{L} y}.$$

Перевіримо збіжність таких рядів за ознакою Д'Аламбера:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} e^{-\frac{\pi y}{L}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{\pi y}{L}} < 1$. Отже, ряди з похідних рівномірно збігаються, значить (2.60) є розв'язком рівняння (2.56) з граничними умовами (2.57). В [6] доведена теорема, згідно з якою знайдений розв'язок є єдиним. Загалом не потрібно кожен раз доводити збіжність рядів, що являють собою розв'язок задач теплопровідності, так як це доводиться в загальному випадку для такого класу задач [7].

Приклад. Визначити температурне поле пластини $t(x, y)$, якщо $t = t_2 = \text{const}$ при $y = 0$.

Розв'язок. В даному випадку $f(x) = t_2$, тому $\Phi(x) = t_2 - t_1$. Обраховуючи інтеграл і підставляючи в попередній вираз, отримаємо:

$$\begin{aligned} T = t - t_1 &= \frac{2}{L} (t_2 - t_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) e^{-\frac{\pi n}{L} y} \frac{L}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{L}\right) \Big|_0^L \Rightarrow \\ 1 - \cos \pi n &= \begin{cases} 2, n = 2k + 1, \\ 0, n = 2k, k \in Z_+ \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{4}{L} (t_2 - t_1) \sum_{n=2k+1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) e^{-\frac{\pi n}{L} y} \frac{L}{\pi n} &= \frac{4}{\pi} (t_2 - t_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \frac{e^{-\frac{\pi n}{L} y}}{n} \end{aligned}$$

Остаточний вираз:

$$\begin{aligned} \frac{t-t_1}{t_2-t_1} &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=2k+1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \cdot \frac{e^{-\frac{\pi n}{L} y}}{n} = \frac{4}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \cdot e^{-\frac{\pi}{L} y} + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{L} x\right) \cdot e^{-\frac{3\pi}{L} y} \dots \right), \\ k &\in Z_+. \end{aligned}$$

Легко показати, що за ознакою Д'Аламбера, даний ряд збігається, а тому є розв'язком задачі.

2.2.2. Двовимірне температурне поле в довгому суцільному напівциліндрі

Як приклад використання двовимірного рівняння Лапласа в циліндричних координатах, розглянемо температурне поле $t(r, \varphi)$ в довгому суцільному напівциліндрі, що обмежений поверхнею $r = r_1$, на якій підтримується довільний розподіл температури $t = t(\varphi)$, і діаметральною площиною, вздовж якої температура стала і рівна t_0 , як показано на (рис. 2.14):

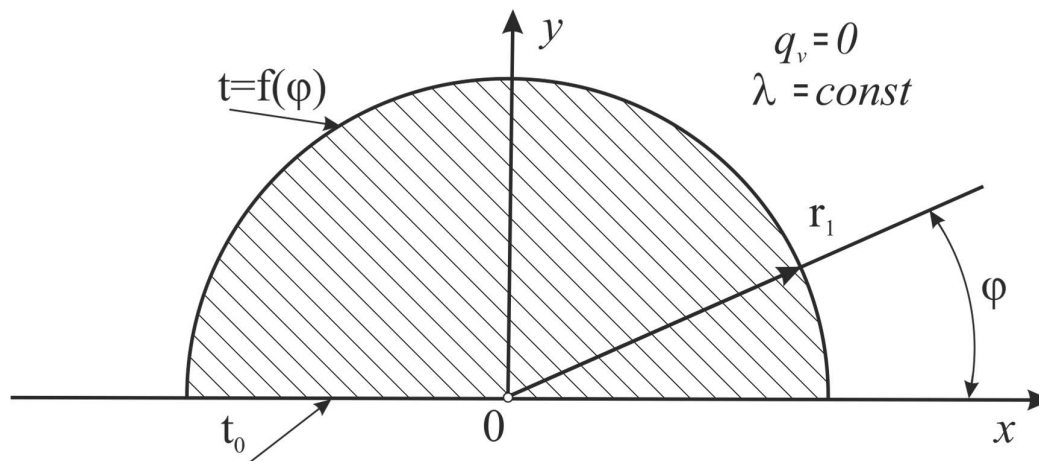


Рис. 2.14. Напівциліндр [1]

Якщо коефіцієнт теплопровідності циліндра сталий ($\lambda = \text{const}$), а його бокові поверхні ідеально ізолювані від теплообміну з оточуючим середовищем ($q_v = 0$), то температурне поле такого циліндра повинно задовольняти рівнянню Лапласа:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} t(r, 0) = t(r, \pi) = t_0 \\ t(r_1, \varphi) = f(\varphi) \end{cases} \quad (2.61)$$

Якщо задати різницю температур як $T = t - t_0$, то $T(r, \varphi)$ має задовольняти диференціальне рівняння в часткових похідних:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.62)$$

і граничні умови:

$$\begin{cases} T(r, 0) = T(r, \pi) = 0 \\ T(r_1, \varphi) = f(\varphi) - t_1 = F(\varphi) \end{cases}$$

Як і в попередній задачі, скористаємось методом розділення змінних і запишемо розв'язок для $T(r, \varphi)$ у вигляді $T = R(r)\Phi(\varphi)$. Підставляючи в рівняння (2.62), отримуємо вираз:

$$\begin{aligned} R_r'' \Phi + \frac{1}{r} R_r' \Phi + \frac{1}{r^2} R \Phi'' &= 0 \\ r^2 R_r'' \Phi + r R_r' \Phi + R \Phi'' &= 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Поділимо (2.63) на $R\Phi$ и перенесемо все, що залежить лише від r , в ліву частину, а в праву – все, що залежить лише від φ . Така рівність можлива лише в тому випадку, якщо ліва і права частини рівні константі, яку для зручності позначимо як n^2 :

$$r^2 \frac{R_r''}{R} + r \frac{R_r'}{R} = - \frac{\Phi''}{\Phi} = n^2.$$

Цей вираз зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} r^2 R_r'' + r R_r' - n^2 R = 0 \\ \Phi'' + n^2 \Phi = 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

Загальний розв'язок першого рівняння системи (2.64) знаходимо за допомогою підстановки $R = r^\alpha$. Підставляючи в перше рівняння системи, отримаємо $\alpha^2 = n^2$, звідки випливає, що $\alpha = \pm n$. Розв'язком другого рівняння системи буде суперпозиція гармонічних функцій. Отримуємо нову систему:

$$\begin{cases} R = C_1 r^n + C_2 r^{-n} \\ \Phi = C_3 \cos n \varphi + C_4 \sin n \varphi \end{cases}$$

Так як в точці $r = 0, T = 0$, то $C_2 = 0$. При $\varphi = 0, T = 0$, тому $C_3 = 0$. Таким чином, частковий розв'язок можна записати у вигляді:

$$T = C r^n \sin n \varphi$$

Для відповідності граничним умовам необхідною є умова $\sin n \pi = 0$, що можливо лише при $n \in Z_+$, і $C = C_n$. Звідси отримуємо загальний розв'язок:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n \sin n \varphi$$

Щоб цей розв'язок задовольняв граничній умові $T = f(\varphi) - t_0 = F(\varphi)$ при $r = r_1$ і $0 < \varphi < \pi$, має виконуватись:

$$F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r_1^n \sin n \varphi,$$

де сталі C_n мають бути коефіцієнтами ряду Фур'є, а саме:

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(\varphi) r_1^{-n} \sin n \varphi d\varphi.$$

Звідси записуємо вираз для T :

$$T = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \sin n \varphi \int_0^{\pi} F(\varphi) \sin n \varphi d\varphi$$

і отримуємо остаточний розв'язок у вигляді ряду:

$$t - t_0 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \sin n \varphi \int_0^{\pi} [f(\varphi) - t_0] \sin n \varphi d\varphi \quad (2.65)$$

Приклад. Знайти розподіл температури в полу циліндрі $t(r, \varphi)$, якщо $f(\varphi) = t_1 = \text{const}$.

Розв'язок. Покладемо $F(\varphi) = t_1 - t_0$, і, у відповідності з (2.65), отримуємо ряд:

$$\begin{aligned} \frac{t-t_0}{t_1-t_0} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \sin n \varphi \frac{1}{n} \cos n \varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \sin n \varphi = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{r}{r_1} \sin \varphi + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 \sin 3 \varphi + \frac{1}{5} \left(\frac{r}{r_1}\right)^5 \sin 5 \varphi + \dots \right), k \in Z_+ \end{aligned}$$

Питання для самоконтролю

1. Які системи називають стаціонарними?
2. Запишіть в загальному випадку стаціонарне рівняння теплопровідності без внутрішніх джерел теплоти.
3. Запишіть одновимірне рівняння теплопровідності для пласкої стінки.
4. Чому буде дорівнювати тепловий потік через пласку стінку, якщо температури на поверхнях стінки підтримуються сталими?
5. Дайте означення термічного опору теплопровідності для пласкої стінки. Яка його розмірність?
6. Яким чином можна впливати на величину теплового потоку через пласку стінку?

7. Чому дорівнює тепловий потік при теплопередачі від одного середовища до іншого через пласку стінку?
8. Чому дорівнює коефіцієнт теплопередачі через пласку стінку? Яка його розмірність?
9. Запишіть закон Фур'є для циліндричної стінки, у випадку, коли температура змінюється лише вздовж радіуса.
10. Чому дорівнює тепловий потік через циліндричну стінку при граничних умовах 1 роду?
11. Запишіть як визначається термічний опір теплопровідності через циліндричну стінку.
12. Чому дорівнює тепловий потік при теплопередачі з одного середовища в інше через циліндричну стінку? Як визначається коефіцієнт теплопередачі?
13. Як визначити температури на границі різних шарів багат шарової циліндричної стінки?
14. Як визначається тепловий потік через багат шарову пласку стінку з послідовним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопровідності?
15. Як визначається тепловий потік при теплопередачі з одного середовища в інше через багат шарову пласку стінку з послідовним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопередачі?
16. Як визначається тепловий потік при теплопередачі з одного середовища в інше через багат шарову пласку стінку з паралельним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопередачі?
17. Як визначається тепловий потік при теплопередачі з одного середовища в інше через багат шарову пласку стінку з комбінованим паралельним і послідовним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопередачі?
18. В чому суть аналогії розповсюдження тепла з ланцюгами електричного струму? Яким чином при обрахунках теплових потоків можна використовувати закони Кірхгофа?
19. Як визначається тепловий потік через багат шарову циліндричну стінку з послідовним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопровідності?

20. Як визначається тепловий потік при теплопередачі з одного середовища в інше через багат шарову циліндричну стінку з послідовним з'єднанням? Чому дорівнює термічний опір теплопередачі?
21. Як визначається тепловий потік через сферичну стінку? Чому дорівнює тепловий опір теплопровідності?
22. Як визначається тепловий потік при теплопередачі з одного середовища до іншого через сферичну стінку? Чому дорівнює тепловий опір теплопередачі?
23. Що таке критичний діаметр теплової ізоляції? Чому він дорівнює у випадках циліндричної та сферичної поверхонь?
24. Запишіть двовимірне стаціонарне рівняння теплопровідності і граничні умови першого роду для напівобмеженої адіабатної пластини. Отримайте загальний розв'язок методом розділення змінних.
25. Запишіть двовимірне стаціонарне рівняння теплопровідності і граничні умови першого роду для напівобмеженої адіабатної пластини. Отримайте загальний розв'язок методом розділення змінних.
26. Запишіть двовимірне стаціонарне рівняння теплопровідності і граничні умови першого роду для нескінченного напівциліндра з сталою теплопровідністю. Отримайте загальний розв'язок у циліндричних координатах методом розділення змінних.

РОЗДІЛ 3. СТАЦІОНАРНІ СИСТЕМИ З ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛОТИ

В реальних установках, що використовуються в енергетиці, часто використовуються системи з джерелами тепла. Джерела тепла можуть бути локалізованими або рівномірно розподілятися в середині об'єму тіла. Важливим є вміння розрахунку температурних полів в таких системах.

При дослідженні переносу теплоти в таких випадках важливо знати інтенсивність об'ємного виділення (поглинання) теплоти, яка кількісно характеризується потужністю внутрішніх джерел теплоти q_v , Вт/м³. Якщо величина q_v додатна, кажуть, що в тілі є додатні джерела теплоти. Від'ємні значення q_v означають, що мають місце від'ємні джерела (стоки) теплоти.

3.1. Суцільний круглий стрижень

Розглянемо температурне поле в тілі при рівномірному розподілі внутрішніх джерел теплоти по всьому об'єму. Задачі такого виду доводиться вирішувати при розрахунках тепловиділяючих елементів атомних реакторів, при нагріві тіл струмами високої частоти і в інших випадках.

Розглянемо для прикладу суцільний круглий циліндр при стаціонарних умовах і зі сталою теплопровідністю (*рис. 3.1*), радіус якого малий у порівнянні з довжиною циліндра. При цих умовах температура буде змінюватись тільки вздовж радіуса.

Внутрішні джерела теплоти рівномірно розподілені по об'єму тіла. Задані температура оточуючого середовища $t_f = \text{const}$ і сталий по всій поверхні коефіцієнт тепловіддачі. При цих умовах температура у всіх точках зовнішньої поверхні циліндра буде однаковою.

Для циліндра, як і для пластини, задача буде одновимірною і симетричною. Диференційне рівняння теплопровідності згідно (1.25) при цьому має вигляд:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0, \quad (3.1)$$

де q_v [Вт/м³] – потужність внутрішніх джерел теплоти; λ – коефіцієнт теплопровідності.

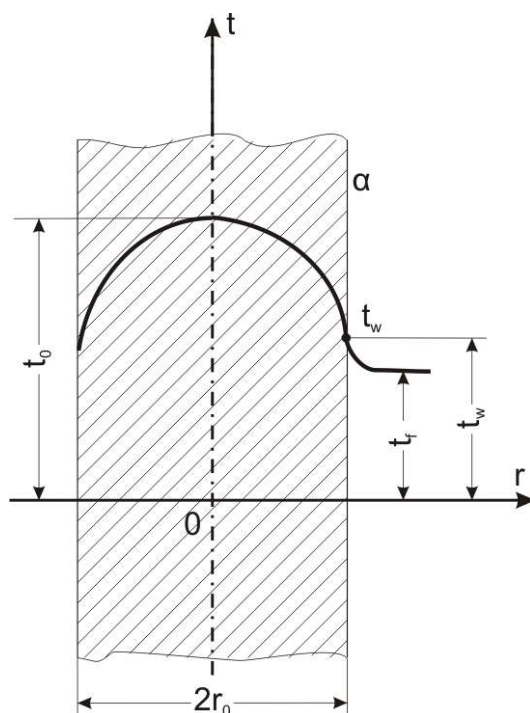


Рис. 3.1. Теплопровідність однорідного циліндричного стрижня за наявності внутрішніх джерел тепла: t_0 – температура на осі; t_w – температура на поверхні.

Задаємо граничні умови 3 роду $\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_w - t_f)$. В силу симетрії температурного поля виконується умова

$$\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \quad (3.2)$$

Необхідно знайти рівняння температурного поля і тепловий потік, а також значення температур на осі t_0 і на поверхні t_w . Проінтегруємо рівняння (3.1). При цьому зробимо заміну $dt/dr = u$. Тоді рівняння (3.1) запишеться:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

Або, після множення на rdr

$$rdu + udr + \frac{q_v}{\lambda} r dr = 0.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$u + \frac{q_v r}{2\lambda} = \frac{C_1}{r}$$

або

$$\frac{dt}{dr} + \frac{q_v r}{2\lambda} = \frac{C_1}{r} \quad (3.3)$$

Після другого інтегрування отримаємо:

$$t = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2, \quad (3.4)$$

де C_1 і C_2 визначаються з граничних умов (3.2).

При $r=0$ з (3.3) знаходимо, що $C_1=0$. При $r=r_0$ $(dt/dr)_{r=r_0} = -q_v r_0 / 2\lambda$.

Підставляючи останній вираз в граничні умови (3.2) отримаємо:

$$\frac{q_v r_0}{2} = \alpha(t_w - t_f)$$

і

$$t_w = \frac{q_v r_0}{2\alpha} + t_f.$$

З (3.4) знаходимо C_2 :

$$C_2 = t_f + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}$$

Підставляючи C_2 в рівняння (3.4), отримаємо рівняння для температурного поля:

$$t = t_f + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda} (r_0^2 - r^2) \quad (3.5)$$

Отримане рівняння дає можливість обрахувати температуру будь-якої точки циліндричного стрижня. Воно показує, що розподіл температури в круглому стержні підпорядковується параболічному закону.

З рівняння (3.5) при $r=0$ знайдемо температуру на осі циліндра:

$$t_0 = t_f + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}$$

Густина теплового потоку на поверхні циліндра:

$$q = \alpha(t_w - t_f) = \frac{q_v r_0}{2}$$

Тепловий потік з поверхні циліндра:

$$Q = qF = \frac{q_v r_0}{2} 2\pi r_0 l = q_v \pi r_0^2 l$$

Приклад. Знайти розподіл температури в тепловиділяючому елементі, що виготовлений з діоксиду урану (UO_2) з тонкостінною оболонкою з нержавіючої сталі. Об'ємна густина джерел тепла $q_v=4.5 \cdot 10^9 \text{ Вт/м}^3$, радіус стрижня $r_0=4.75 \text{ мм}$, коефіцієнт теплопровідності $\lambda=64 \text{ Вт/м}^\circ\text{С}$, температура теплоносія (води) $t_f=40^\circ\text{С}$,

коефіцієнт тепловіддачі $\alpha=3.4 \cdot 10^3$ Вт/ м²°С. Знайти температуру стінки t_w і температуру на осі твела t_0 .

Розв’язок. Скористаємось формулою (3.5). Розподіл температури: $t = 40 + \frac{4.5 \cdot 10^8 \cdot 4.75 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3.4 \cdot 10^3} + \frac{4.5 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 2} ((4.75)^2 - r^2) \approx 1623 - 56.25r^2$ показано на *рис. 3.2*. Температура на осі твела $t_0=1623$ °С, температура на стінці – $t_w=354$ °С.

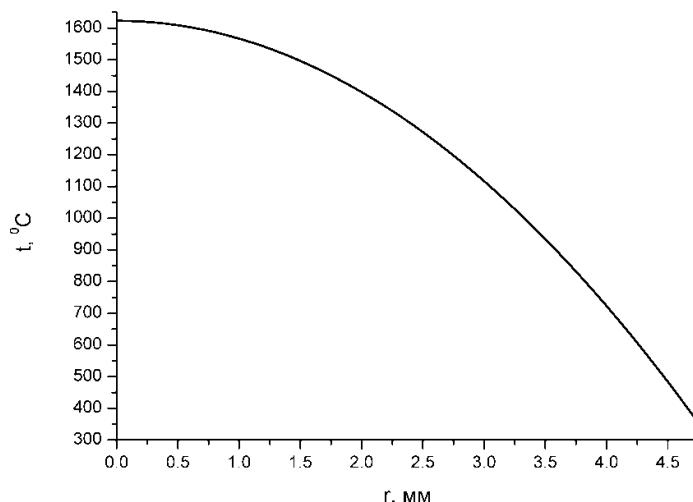


Рис. 3.2. Розподіл температури в тепловідляючому елементі в залежності від відстані до осі стрижня

3.2. Місцеве джерело теплоти в пластині при неадіабатних умовах

Розглянемо стаціонарний розподіл температури в неізольованій нескінченній тонкій пластині з розміщеним в ній циліндричним джерелом тепла s радіусом r_s (*Рис. 3.3*). Товщина самої пластини рівна δ , а коефіцієнт її теплопровідності λ вважаємо сталим. Окрім центрального джерела тепла s пластина отримує тепло через зовнішню поверхню 1 від газу з температурою t_{g1} і віддає тепло через зовнішню поверхню 2 газу з температурою t_{g2} . Коефіцієнти тепловіддачі на цих поверхнях рівні відповідно α_1 і α_2 . Величини t_{g1} , t_{g2} , α_1 і α_2 вважаємо сталими. У випадку тонкої пластини з високою провідністю, ми додатково вважаємо, що в напрямку нормалі до зовнішніх поверхонь 1 і 2 нема

градієнту температури. Вважатимемо, що загальна кількість тепла, що виділяється джерелом в циліндричному об'ємі $\pi r_s^2 \delta$ рівне Q_0 Вт, а джерело має всюди однакову температуру t_0 . Отже, Q_0 і t_0 розглядаються нами як відомі величини. Задача полягає в тому, щоб знайти розподіл температур $t(r)$ в стаціонарному стані для $r_s < r < \infty$.

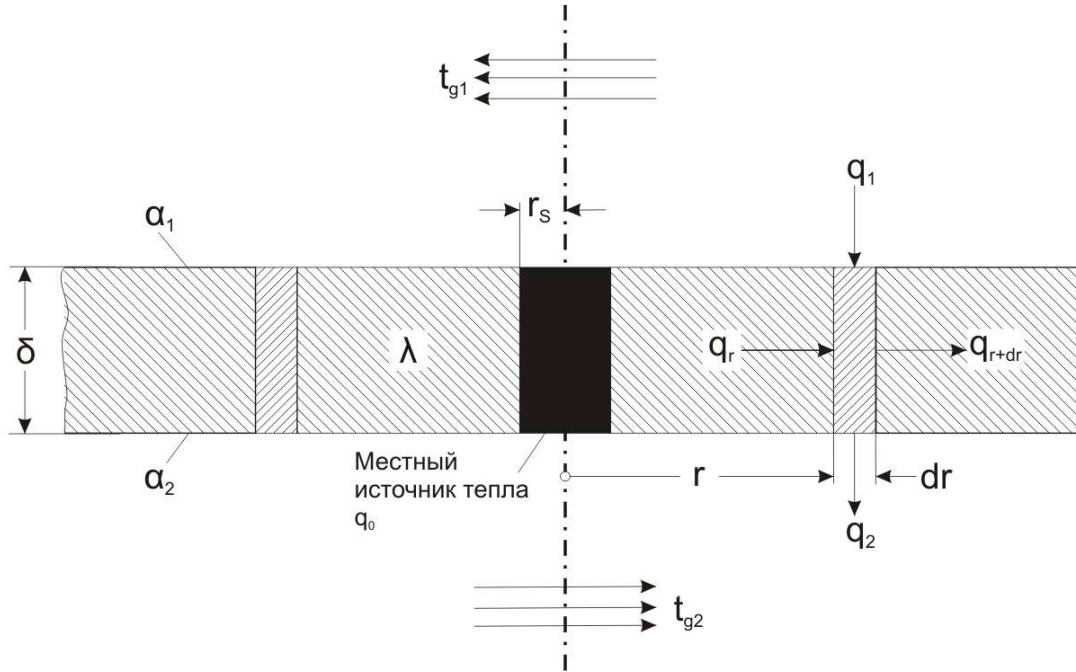


Рис. 3.3. Місцеве джерело тепла в неадіабатній пластині

Виділимо в пластині співвісне з джерелом кільце радіуса r товщиною dr . Площа бокової поверхні кільця рівна $2\pi r \delta$, а площа основи кільця – $2\pi r dr$. Складемо тепловий баланс в об'ємі $2\pi r dr \delta$. Тепловий потік Q_r , котрий входить в кільце через бокову поверхню за рахунок теплопровідності, може бути записаний, використовуючи закон Фур'є:

$$Q_r = -2\pi r \delta \lambda \frac{dt}{dr} \quad (3.6)$$

Тепловий потік Q_{r+dr} , який виходить через бокову поверхню з кільця за рахунок теплопровідності, з огляду на те, що кільце нескінченно тонке, може бути записаний як прзклад в ряд Тейлора до 2 члена:

$$Q_{r+dr} = Q_r + \left(\frac{\partial Q_r}{\partial r} \right) dr \quad (3.7)$$

Підставляючи (3.6) в (3.7) отримуємо:

$$Q_{r+dr} = -2\pi r \delta \lambda \frac{dt}{dr} - 2\pi \delta \lambda \frac{dt}{dr} dr - 2\pi r \delta \lambda \frac{d^2 t}{dr^2} dr$$

З зовнішнім середовищем пластина обмінюється теплотою шляхом тепловіддачі через верхню і нижню основу кільця. Вважаючи, що $t_{g1} > t_{g2}$ і використовуючи закон Ньютона, отримаємо вираз для потоків Q_1 і Q_2 :

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2\pi r \alpha_1 (t_{g1} - t) dr \\ Q_2 &= 2\pi r \alpha_2 (t - t_{g2}) dr \end{aligned} \quad (3.8)$$

В стаціонарному стані $Q_1 + Q_r - Q_2 - Q_{r+dr} = 0$, тому

$$r^2 \frac{d^2 t}{dr^2} + r \frac{dt}{dr} - \frac{r^2}{\lambda \delta} (\alpha_1 + \alpha_2) \left[t - \frac{\alpha_1 t_{g1} + \alpha_2 t_{g2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] = 0 \quad (3.9)$$

При $r \rightarrow \infty$ $t \rightarrow const$. Відповідно, коли $r \rightarrow \infty$, $\frac{dt}{dr}$ і $\frac{d^2 t}{dr^2}$ прямують до нуля, тобто

$$t_{r \rightarrow \infty} = \frac{\alpha_1 t_{g1} + \alpha_2 t_{g2}}{\alpha_1 + \alpha_2} = \zeta \quad (3.10)$$

При цьому, якщо за нову залежну змінну прийняти $T = t - \zeta$, то диференціальне рівняння (3.9) набуває вигляду:

$$r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + r \frac{dT}{dr} - \varepsilon^2 r^2 T = 0 \quad (3.11)$$

де $\varepsilon^2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda \delta}$.

Рівняння (3.11) є модифікованим рівнянням Бесселя нульового порядку. Частковим розв'язком такого типу рівнянь є модифіковані функції Бесселя. Детальний теоретичний розгляд функцій Бесселя наводиться в Додатку А даного посібника, з котрим бажано ознайомитись до вивчення наступного матеріалу.

Загальний розв'язок рівняння (3.11) є суперпозицією модифікованих функцій Бесселя:

$$T = t - \zeta = C_1 I_0(\varepsilon r) + C_2 K_0(\varepsilon r), \quad (3.12)$$

де I_0 та K_0 є функціями Інфельда і Макдональда нульового порядку. Модифікована функція $I_0(\varepsilon r)$ необмежено зростає по мері того, як її аргумент εr прямує до нескінченності. Таким чином, для того щоб температура $t(r)$ залишалась сталою при $r \rightarrow \infty$, довільна стала C_1 має бути рівна нулю.

Наявність градієнта $\frac{dT}{dr}$ пояснюється виникненням теплового потоку, що бере початок від джерела. При $r \rightarrow r_s$ маємо:

$$Q_0 = -2\pi\lambda\delta r_s \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r_s} = -2\pi\lambda\delta r_s \frac{d}{dr} [C_2 K_0(\varepsilon r)] \Big|_{r_s} = 2\pi\lambda\delta r_s C_2 \varepsilon K_1(\varepsilon r_s).$$

Звідси знаходимо другу довільну сталу:

$$C_2 = \frac{Q_0}{2\pi\lambda\delta \varepsilon K_1(\varepsilon r_s)}.$$

Таким чином, радіальний розподіл температури $t(r)$ визначається формулою:

$$t = \zeta + \frac{Q_0}{2\pi\lambda\delta\epsilon r_s} \frac{K_0(\epsilon r)}{K_1(\epsilon r_s)} \quad (3.13)$$

3.3. Температурне поле в електричних котушках

Електрична котушка, виконана в тій чи іншій формі, є важливою складовою частиною численних електричних приладів. Розглянути їх усі не є можливим. Для прикладу ми розберемо два види електричних котушок (суцільну і порожнисту) які являють найбільший інтерес з огляду на широку область технічного застосування від трансформаторів до токамаків.

Формули для точного опису розподілу температури в таких провідниках, а також для розрахунку максимальних температур в точках перегріву являє великий інтерес, особливо якщо врахувати, що часто максимально допустимий струм в котушці (максимальне електричне навантаження) заздалегідь визначається фіксованим значенням максимальної температури, що допускається для матеріалу котушки. Нові конструкції, що розширюють робочі характеристики існуючого обладнання, а також обрахунок безпечних границь перевантаження залежать від такого роду відомостей.

3.3.1 Температурне поле суцільної електричної котушки

Звичайна котушка має спіралевидну або приблизно тороїдальну форму (рис.3.4).

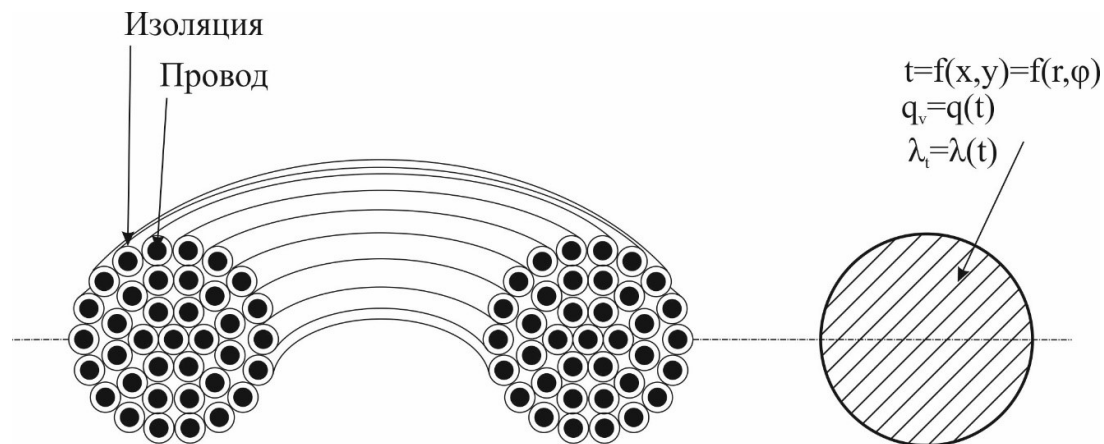


Рис. 3.4. Модель електричної котушки

Зазвичай кривизною поздовжньої осі котушки можна знехтувати і вважати, що довжина цієї осі велика в порівнянні з розмірами профільного поперечного перетину. Це означає, що термічний опір в поздовжньому напрямі настільки перевищує поперечний опір профіля, що все тепло відводиться до поверхні котушки в поперечному напрямі, де воно і розсіюється в оточуюче середовище з більш низькою температурою. Як правило цим середовищем просто слугує атмосфера, або ж котушка може бути занурена в рідину (нижче буде розглянуто обидва випадки). Занурення в охолоджену рідину або охолодження поверхонь котушки газом ще не забезпечує ізотермічності цих поверхонь.

На практиці реальна тороїдальна котушка зводиться до прямого однорідного бруска (циліндра), в середині якого діють внутрішні джерела тепла.

Потік джоулевого тепла Q в котушці при температурі t буде рівний $Q = I^2 R = I^2 R_0(1 + \alpha_0 t)$. Об'ємна густина внутрішніх джерел тепла:

$$q_V = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\pi r_l^2 l}; q_V = q_{V_0}(1 + \alpha_0 t); q_{V_0} = \frac{I^2 R_0}{\pi r_l^2 l},$$

де r_l – радіус котушки, V – її об'єм, l – довжина.

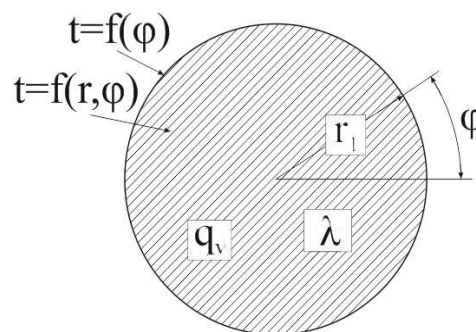


Рис.3.5. Котушка суцільного круглого перерізу

Граничні умови 1 роду. Розглянемо електричну котушку з суцільним круглим профілем і постійним коефіцієнтом теплопровідності λ . Виділення Джоулевого тепла відбувається по лінійному закону $q_V = q_{V_0}(1 + \alpha_0 t)$; температура $t(r_l, \varphi)$ поверхні котушки, є довільною функцією азимутального кута φ , тобто $t(\varphi)$.

Згідно (1.25) в цьому випадку стаціонарна температура профіля задовольняє рівняння в часткових похідних:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{q_V}{\lambda} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{qv_0(1+\alpha_0 t)}{\lambda} = 0 \quad (3.15)$$

Введемо позначення: $\frac{qv_0}{\lambda} = a$ та $\frac{qv_0 \alpha_0 t}{\lambda} = bt$. Тоді:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + a + bt = 0 \quad (3.16)$$

Нехай $T = a + bt$, звідси маємо:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + bT = 0 \quad (3.17)$$

Будемо шукати розв'язок для $T(r, \varphi)$ у вигляді добутку двох функцій, що залежать від однієї змінної: $T = R(r)\Phi(\varphi)$. Підставивши цей добуток в (3.17) і помноживши на r^2 отримаємо:

$$r^2 R'' \Phi + r R' \Phi + R \Phi'' + r^2 b R \Phi = 0.$$

Розділимо на $R\Phi$:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} + r^2 b = 0.$$

Перенесемо в ліву частину все, що залежить тільки від r , а в праву – все, що залежить тільки від φ . Це можливо тільки в тому випадку, якщо ліва і права частини дорівнюють деякій константі, яку для зручності позначимо μ^2 :

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 b = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2.$$

В результаті отримаємо систему з 2 звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 b - \mu^2 = 0 \\ \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0 \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на R остаточно отримаємо:

$$\begin{cases} r^2 R'' + r R' + (r^2 b - \mu^2) R = 0 \\ \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Вводячи заміну $\tilde{r} = \sqrt{b}r$ бачимо, що перше рівняння системи (3.18) зводиться до рівняння Бесселя порядку μ :

$$\begin{cases} \tilde{r}^2 R'' + \tilde{r} R' + (\tilde{r}^2 - \mu^2) R = 0 \\ \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0 \end{cases}$$

Відповідні загальні розв'язки цих рівнянь мають вид:

$$R = C_1 J_\mu(\sqrt{b}r) + C_2 Y_\mu(\sqrt{b}r) \quad (3.19)$$

$$\Phi = C_3 \cos \mu \varphi + C_4 \sin \mu \varphi \quad (3.20)$$

Таким чином, частковий розв'язок рівняння (3.17) можна подати у вигляді:

$$T = [C_1 J_\mu(\sqrt{b}r) + C_2 Y_\mu(\sqrt{b}r)][C_3 \cos \mu \varphi + C_4 \sin \mu \varphi] \quad (3.21)$$

Проте для циліндра розв'язок має бути періодичним по φ : $T(r, \varphi) = T(r, \varphi \pm 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді з (3.21) слідує, що $\sin(\mu\varphi) = \sin(\mu\varphi + 2\pi\mu n)$ і, аналогічно, для косинуса. Але це означає, що $2\pi\mu n$ має бути періодом, а це можливо лише в тому випадку, якщо μ ціле ($\mu \in \mathbb{Z}_+$). Відповідно, лінійна комбінація розв'язків типу (3.21) з різними константами, що залежать від μ , також

є розв'язками рівняння (3.17). Так як функція $T(r, \varphi)$ має залишатись скінченною при $r \rightarrow \infty$, то другий розв'язок рівняння Бесселя $Y_\mu(\sqrt{b}r)$ має бути відкинутий; тому $C_2 = 0$. Позначимо $C_1 C_3$ як M , а $C_1 C_4$ як N . Таким чином, маємо:

$$T = a + bt = \sum_{\mu=0}^{\infty} [M_\mu \cos \mu \varphi + N_\mu \sin \mu \varphi] J_\mu(\sqrt{b}r) \quad (3.22)$$

Загальний розв'язок (3.22) необхідно узгодити з граничною умовою 1 роду $t = f(\varphi)$ при $r = r_1$ (рис. 3.5). Підставивши $t(r_1)$ в T перепозначимо нову функцію: $T = a + bf(\varphi) = F(\varphi)$. Підставивши її в (3.22) отримаємо:

$$F(\varphi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} [M_\mu \cos \mu \varphi + N_\mu \sin \mu \varphi] J_\mu(\sqrt{b}r_1)$$

Цей вираз є ніщо інше, як розклад в ряд Фур'є довільної функції $F(\varphi)$. Для такого розкладу в інтервалі 2π постійні коефіцієнти M_μ та N_μ визначаються наступним чином:

$$J_\mu(\sqrt{b}r_1) M_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos \mu \varphi d\varphi,$$

та

$$J_\mu(\sqrt{b}r_1) N_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin \mu \varphi d\varphi,$$

де треба мати на увазі, що першим коефіцієнтом є $M_0/2$. Це дає можливість отримати остаточний розв'язок в формі:

$$T = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\sin \mu \varphi \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin \mu \varphi d\varphi + \cos \mu \varphi \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos \mu \varphi d\varphi \right] \frac{J_\mu(\sqrt{b}r)}{J_\mu(\sqrt{b}r_1)}, \quad (3.23)$$

де $T = a + bt$, $a = \frac{qv_0}{\lambda}$, $b = \frac{qv_0\alpha_0}{\lambda}$.

Приклад. Котушка наполовину занурена в масляну ванну. Знайти $t(r, \varphi)$ якщо поверхня, що контактує з повітрям має температуру t_0 , а поверхня, занурена в масло, – температуру t_1 .

Розв'язок. Граничні температури можна представити через $F(\varphi)$ у вигляді:

$$F(\varphi) = a + bt_0 \text{ при } r = r_1 \text{ та } 0 < \varphi < \pi,$$

$$F(\varphi) = a + bt_1 \text{ при } r = r_1 \text{ та } \pi < \varphi < 2\pi.$$

Визначимо коефіцієнти розв'язку (3.23) розбивши проміжок інтегрування на два інтервали: $[0; \pi)$ та $[\pi; 2\pi)$. Для першого коефіцієнта при $\mu = 0$ маємо:

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{2} &= \frac{1}{J_0(\sqrt{b}r_1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{J_0(\sqrt{b}r_1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (a + bt_0) d\varphi + \frac{1}{J_0(\sqrt{b}r_1)} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (a + bt_1) d\varphi = \\ &= \frac{1}{J_0(\sqrt{b}r_1)} \left(a + \frac{b}{2}(t_0 + t_1) \right) \end{aligned}$$

Решта коефіцієнтів для $\mu \neq 0$ обраховуються у вигляді:

$$\begin{aligned} N_\mu &= \frac{1}{J_\mu(\sqrt{b}r_1)} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin \mu \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{J_\mu(\sqrt{b}r_1)} \left(\int_0^{\pi} (a + bt_0) \sin \mu \varphi d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} (a + bt_1) \sin \mu \varphi d\varphi \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{J_\mu(\sqrt{b}r_1)} \frac{2b}{\pi\mu} (t_0 - t_1), \mu = 2k + 1 \\ 0, \mu = 2k \end{cases} \quad k \in Z \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos \mu \varphi d\varphi = 0.$$

Звідси розв'язок $t(r, \varphi)$, що задовольняє заданим граничним температурам, дається співвідношенням:

$$t = \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{2}(t_0 + t_1) \right) \frac{J_0(\psi)}{J_0(\psi_1)} + \frac{2}{\pi}(t_0 - t_1) \left[\sin \varphi \frac{J_1(\psi)}{J_1(\psi_1)} + \frac{1}{3} \sin 3\varphi \frac{J_3(\psi)}{J_3(\psi_1)} + \dots \right] - \frac{a}{b}$$

в якому $\psi = \sqrt{b}r$ і $\psi_1 = \sqrt{b}r_1$; $b = \frac{q_{v0}\alpha_0}{\lambda}$.

Граничні умови 3 роду. Розглянемо котушку з суцільним круглим перерізом, що розсіює тепло в оточуюче газове середовище f . Нехай температура поверхні котушки невідома, дані тільки незмінна температура газу t_f і сталий коефіцієнт тепловіддачі α .

Якщо котушка має постійний коефіцієнт теплопровідності λ , то симетричний розподіл температури $t(r)$ в даному випадку має задовольняти звичайному диференційному рівнянню:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{q_{v0}(1+\alpha_0 t)}{\lambda} = 0 \quad (3.24)$$

і граничній умові 3 роду:

$$\left(\frac{dt}{dr} \right)_{r=r_1} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_w - t_f), \quad (3.25)$$

де t_w – температура стіни, t_f – температура середовища.

Знову вводячи змінну $T = a + bt$, ми можемо переписати рівняння (3.24) в формі рівняння Бесселя нульового порядку:

$$r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + r \frac{dT}{dr} + br^2 T = 0 \quad (3.26)$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$T = C_1 J_0(\sqrt{b}r) + C_2 Y_0(\sqrt{b}r)$$

Оскільки при $r=0$ значення температури має набувати кінцевого значення, стала C_2 знову дорівнює нулю. Використаємо умову (3.25)

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1} = -\frac{C_1}{\sqrt{b}} J_1(\psi_1) = -\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{C_1}{b} J_0(\psi_1) - t_f - \frac{1}{\alpha_0}\right)$$

знаходимо, що стала C_1 дорівнює:

$$C_1 = \frac{\left(t_f + \frac{1}{\alpha_0}\right)b}{J_0(\psi_1) - \gamma J_1(\psi_1)},$$

де $\gamma = \sqrt{q_{V_0} \alpha_0 \lambda} / \alpha$, $\psi_1 = \sqrt{b}r_1$.

Шуканий розв'язок запишемо у вигляді $t = \frac{T-a}{b}$

$$t = \frac{\left(t_f + \frac{1}{\alpha_0}\right)}{J_0(\psi_1) - \gamma J_1(\psi_1)} J_0(\sqrt{b}r) - \frac{1}{\alpha_0} \quad (3.27)$$

3.3.2 Температурне поле порожнистої електричної котушки

Порожністі профілі є вдосконаленням для котушок генераторів великої потужності з внутрішнім охолодженням. Розглянемо котушку з порожнистим круглим профільним перерізом і сталим коефіцієнтом теплопровідності λ , що зображена на рис. 3.6

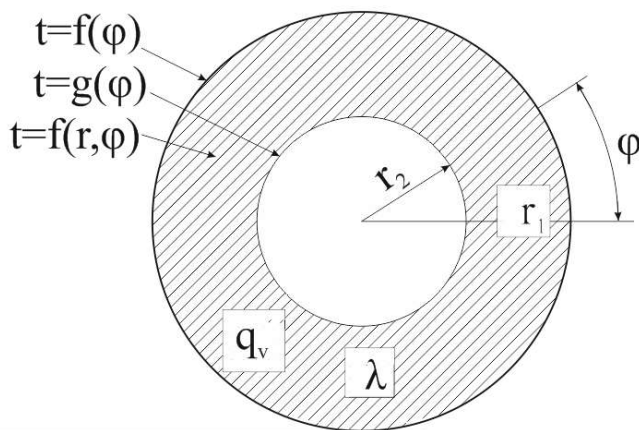


Рис. 3.6 Порожниста котушка круглого перерізу

Джоулева теплота, що виділяється котушкою описується лінійним законом $q_v = q_{v_0}(1 + \alpha_0 t)$, а її поверхневі температури $t(r_1, \varphi)$ і $t(r_2, \varphi)$ є довільними функціями $t = f(\varphi)$ і $t = g(\varphi)$. Використаємо граничні умови 1 роду і опустимо математичні викладки з огляду на їх ідентичність з випадком суцільної електричної котушки. Знову відповідним диференціальним рівнянням є рівняння (3.17) розв'язком якого, як було встановлено раніше, є простий добуток розв'язків (3.19) і (3.20). Проте в цьому випадку розв'язок Y_μ має бути збережений і $T = R\Phi$ має більш загальну форму:

$$T = \sum_{\mu=0}^{\infty} \{ [A_\mu J_\mu(\sqrt{b}r) + B_\mu Y_\mu(\sqrt{b}r)] \sin \mu \varphi + [C_\mu J_\mu(\sqrt{b}r) + D_\mu Y_\mu(\sqrt{b}r)] \cos \mu \varphi \}. \quad (3.28)$$

Таким чином, підставляючи граничні температури для T у вигляді:

$$T = a + bf(\varphi) = F(\varphi) \quad \text{при } r = r_1 \text{ і } 0 < \varphi < 2\pi,$$

$$T = a + bg(\varphi) = G(\varphi) \quad \text{при } r = r_2 \text{ і } 0 < \varphi < 2\pi,$$

отримаємо розклад в ряд Фур'є:

$$F(\varphi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \{ [A_{\mu}J_{\mu}(\psi_1) + B_{\mu}Y_{\mu}(\psi_1)] \sin \mu \varphi + [C_{\mu}J_{\mu}(\psi_1) + D_{\mu}Y_{\mu}(\psi_1)] \cos \mu \varphi \}$$

$$G(\varphi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \{ [A_{\mu}J_{\mu}(\psi_2) + B_{\mu}Y_{\mu}(\psi_2)] \sin \mu \varphi + [C_{\mu}J_{\mu}(\psi_2) + D_{\mu}Y_{\mu}(\psi_2)] \cos \mu \varphi \}$$

Сталі коефіцієнти, що стоять в дужках, є коефіцієнтами ряду Фур'є і визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} A_{\mu}J_{\mu}(\psi_1) + B_{\mu}Y_{\mu}(\psi_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin \mu \varphi d\varphi, \\ A_{\mu}J_{\mu}(\psi_2) + B_{\mu}Y_{\mu}(\psi_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \sin \mu \varphi d\varphi, \\ C_{\mu}J_{\mu}(\psi_1) + D_{\mu}Y_{\mu}(\psi_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos \mu \varphi d\varphi, \\ C_{\mu}J_{\mu}(\psi_2) + D_{\mu}Y_{\mu}(\psi_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \cos \mu \varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (3.29)$$

де, у відповідності з попередніми позначеннями, $\psi_1 = \sqrt{b}r_1$ і $\psi_2 = \sqrt{b}r_2$.

Ці чотири співвідношення використовуються для обчислення A_{μ} , B_{μ} , C_{μ} і D_{μ} , якщо $F(\varphi)$ і $G(\varphi)$ можуть бути виражені як функції свого аргументу в інтервалі 2π . Остаточний розв'язок можна одержати після того, як ми підставимо в (3.28) значення A_{μ} , B_{μ} , C_{μ} и D_{μ} знайдені шляхом розв'язання системи (3.29) відносно цих сталих.

Приклад 1. Порожниста котушка має сталі граничні температури $f(\varphi) = t_1$ і $g(\varphi) = t_2$. Зайти $t(r)$.

Розв'язок. В даному випадку

$$F(\varphi) = a + bt_1 \text{ при } r = r_1 \text{ і } 0 < \varphi < 2\pi$$

$$G(\varphi) = a + bt_2 \text{ при } r = r_2 \text{ і } 0 < \varphi < 2\pi,$$

В системі (3.29) інтеграли обертаються в нуль для всіх значень μ окрім нуля звідки слідує $A_\mu = B_\mu = C_\mu = D_\mu = 0$. І тільки перші коефіцієнти для $\mu = 0$ не обертаються в нуль, а саме:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi = a + bt_1 \quad i \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) d\varphi = a + bt_2.$$

Коефіцієнти, відповідно, знаходимо з системи:

$$\begin{aligned} C_0 J_0(\psi_1) + D_0 Y_0(\psi_1) &= a + bt_1 \\ C_0 J_0(\psi_2) + D_0 Y_0(\psi_2) &= a + bt_2. \end{aligned}$$

Розв'язуючи дану систему методом Крамера або будь-яким іншим способом отримаємо:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\Psi} [(a + bt_2) Y_0(\psi_1) - (a + bt_1) Y_0(\psi_2)], \\ D_0 &= \frac{1}{\Psi} [(a + bt_1) J_0(\psi_2) - (a + bt_2) J_0(\psi_1)], \end{aligned}$$

де

$$\Psi = J_0(\psi_2) Y_0(\psi_1) - J_0(\psi_1) Y_0(\psi_2).$$

Підставляючи у вираз (3.28) замість довільних сталих знайдені значення, отримаємо остаточний розв'язок, що задовольняє граничним умовам, у формі:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\Psi} \left[\left(t_2 + \frac{1}{\alpha_0} \right) Y_0(\psi_1) - \left(t_1 + \frac{1}{\alpha_0} \right) Y_0(\psi_2) \right] J_0(\psi) + \\ &+ \left[\left(t_1 + \frac{1}{\alpha_0} \right) J_0(\psi_2) - \left(t_2 + \frac{1}{\alpha_0} \right) J_0(\psi_1) \right] Y_0(\psi) - \frac{1}{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Питання для самоконтролю

1. Запишіть стаціонарне рівняння теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти зі сталою теплопровідністю.
2. Запишіть рівняння теплопровідності для суцільного круглого стрижня з рівномірно розподіленими внутрішніми джерелами теплоти. Запишіть граничні умови 3 роду.
3. Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності для суцільного круглого стрижня з рівномірно розподіленими джерелами теплоти.
4. Запишіть рівняння теплопровідності для адіабатної тонкої пластини з циліндричним джерелом теплоти. Запишіть граничні умови 3 роду для даної системи.
5. Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності для тонкої адіабатної системи з циліндричним джерелом теплоти.
6. Запишіть рівняння теплопровідності для суцільної електричної котушки.
7. Запишіть граничні умови 1 роду для рівняння теплопровідності у випадку суцільної електричної котушки. Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності для даного випадку.
8. Запишіть граничні умови 3 роду для рівняння теплопровідності у випадку суцільної електричної котушки. Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності для даного випадку.
9. Запишіть рівняння теплопровідності для порожнистої електричної котушки. Як шукається розв'язок у випадку граничних умов 1 роду?
10. Розгляньте частковий випадок порожнистої електричної котушки в якому температури на зовнішній і внутрішній поверхнях котушки сталі і не залежать від кута φ . Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності для такої системи.

РОЗДІЛ 4. НЕСТАЦІОНАРНІ СИСТЕМИ. НАГРІВ ТА ОХОЛОДЖЕННЯ

4.1. Нестационарне температурне поле

Залежність температури не тільки від координат, але і від часу ускладнює графічне відображення температурного поля. На рис. 4.1 показана зміна температури для двох точок тіла, яке перед нагріванням має однорідне температурне поле.

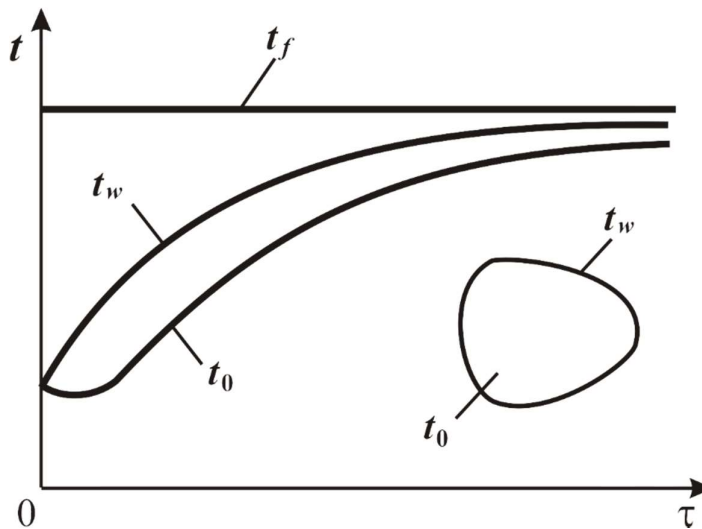


Рис. 4.1. Зміна температури перед нагріванням

Диференціальне рівняння енергії в твердому тілі без внутрішніх джерел теплоти має вигляд

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (4.1)$$

Характер взаємодії тіла з навколишнім середовищем описується граничними умовами третього роду

$$a(t_w - t_f) = -\lambda_{\text{ст}} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (4.2)$$

де $\lambda_{\text{ст}}$ — теплопровідність стінки; $\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=0}$ — температурний градієнт в твердому тілі на границі стінки і середовища.

При рівномірному температурному полі в початковий момент процесу теплообміну часові умови мають простий вигляд: при $\tau = 0$ $t = t'$.

Позначимо надлишкову температуру в будь-якій точці тіла в довільний момент часу через θ :

$$\theta = t - t_f.$$

Для точок, які розташовані на поверхні і в центрі стінки,

$$\theta_w = t_w - t_f, \theta_0 = t_0 - t_f.$$

Для початкового моменту часу

$$\theta' = t' - t_f.$$

Безрозмірна надлишкова температура

$$\tilde{\theta} = \theta / \theta'.$$

Позначимо безрозмірні координати: $x/l = \tilde{x}$; $y/l = \tilde{y}$; $z/l = \tilde{z}$, де l — характерний розмір тіла.

Приведемо рівняння (4.1) до безрозмірного вигляду. Так як

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\theta'}{l^2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2}, \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\theta'}{l^2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}^2}, \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{\theta'}{l^2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2}, \frac{\partial t}{\partial \tau} = \theta' \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau},$$

То рівняння (4.1) приводяться до вигляду

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial (a\tau/l^2)} = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2}.$$

Відповідно, для подібних точок, у яких $\tilde{x} = idem$, $\tilde{y} = idem$, $\tilde{z} = idem$, безрозмірна температура $\tilde{\theta}$ залежить від числа Фур'є $Fo = a\tau/l^2$. Але зв'язок величин $\tilde{\theta}$ та Fo неоднозначний, оскільки конкретна форма цього зв'язку залежить від крайових умов.

Аналіз рівняння (4.2), який визначає умови теплообміну на границях, методами теорії подібності показує, що подібність процесів теплообміну на межі тіла визначається числом Біо:

$$Bi = \alpha l / \lambda_{ст}. \quad (4.3)$$

Відповідно, для конкретної форми тіла для температурного поля $\theta = f(x, y, z)$ будуть подібні, а безрозмірні надлишкові температури $\tilde{\theta}$ в подібних точках будуть однакові при умові:

$$Fo = idem; Bi = idem.$$

Тому температурне поле при нестационарній теплопровідності визначається узагальненим виразом

$$\tilde{\theta} = f(Fo, Bi, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

вид функції якого залежить від форми тіла. Для одномірних задач вид цієї функції в тілах простої форми виявлено аналітичним шляхом.

4.2. Одновимірне рівняння теплопровідності

Розглянемо наступну одновимірну нестационарну задачу:

$$\begin{cases} \alpha T_{xx}(x, t) = T_t(x, t) \\ T(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (4.4)$$

Дану задачу можна інтерпретувати як поширення тепла в довгому тонкому стрижні далеко від його кінців, причому вважається, що тепловіддача з поверхні стрижня дуже мала. Дана ідеалізація дуже обмежена за своїм застосуванням, проте, дозволяє краще усвідомити деякі принципові моменти.

Дотримуючись загального підходу, уявімо шукану функцію у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної:

$$T(x, t) = X(x)\Phi(t) \quad (4.5)$$

Підстановкою в перше рівняння системи (4.4), отримаємо такий вираз:

$$\alpha \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}$$

Ліва частина не залежить від часу, права — від координати, це може бути лише в тому випадку, якщо обидві частини дорівнюють деякій сталій. Позначаючи її через $-\lambda^2$ отримуємо два звичайних диференціальних рівняння:

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$\Phi' = -\alpha \lambda^2 \Phi$$

Рішення тривіально, отримуємо:

$$X = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

$$\Phi = Ce^{-\alpha\lambda^2 t}$$

Підставляючи отримані рішення в (4.5), отримаємо загальне рішення:

$$T(x, t) = (A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)) Ce^{-\alpha\lambda^2 t} \quad (4.6)$$

Позначимо $AC = \tilde{a}$, $BC = \tilde{b}$. З урахуванням цих позначень (4.6) набирає вигляду:

$$T_\lambda(x, t) = (\tilde{a} \cos(\lambda x) + \tilde{b} \sin(\lambda x)) e^{-\alpha\lambda^2 t} \quad (4.7)$$

Цей розв'язок є частковим розв'язком рівняння з системи (4.4) при деякому значенні параметра λ . Для отримання загального розв'язку, як відомо, необхідно взяти суперпозицію функцій (4.7) з різними значеннями λ . Особливість нашого завдання полягає в тому, що через відсутність граничних умов (розглядаємо область далеко від кінців стрижня) λ , взагалі кажучи, приймає не дискретний, а континуальний (безперервний) ряд значень. З урахуванням цього факту, загальне рішення дається інтегралом від виразу (4.7) за всіма можливими λ , причому \tilde{a} та \tilde{b} ми вважаємо функціями, залежними від λ :

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{a}(\lambda) \cos(\lambda x) + \tilde{b}(\lambda) \sin(\lambda x)) e^{-\alpha\lambda^2 t} d\lambda \quad (4.8)$$

Тепер прийшов час використовувати початкову умову з системи (4.4). Підставляючи її в (4.8) маємо:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{a}(\lambda) \cos(\lambda x) + \tilde{b}(\lambda) \sin(\lambda x)) d\lambda \quad (4.9)$$

Нагадаємо, як виглядає косинус-перетворення Фур'є:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi \right)$$

Функція $f(x)$ передбачається абсолютно інтегрованою на всій осі. Треба зауважити, що той факт, що $f(x)$ повинна бути абсолютно інтегрованою, можна усвідомити чисто з фізичних міркувань. Згадаймо, що $f(x)$ являє собою функцію розподілу початкової температури в стрижні. Якби інтеграл від цієї функції по всій довжина стержня розходився б, це б означало, що стрижню передали нескінченну кількість теплоти, що фізично абсурдно.

Розкриваючи косинус під інтегралом, отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda x) d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\lambda x) d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin(\lambda \xi) d\xi \right).$$

Порівнявши тепер цей вираз з (4.9), можемо зробити висновок, що \tilde{a} та \tilde{b} є виразами:

$$\tilde{a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda \xi) d\xi \text{ а } \tilde{b} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin(\lambda \xi) d\xi \quad (4.10)$$

Підставивши (4.10) в (4.8), отримаємо рішення:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda \xi) d\xi \right) \cos(\lambda x) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin(\lambda \xi) d\xi \right) \sin(\lambda x) \right] e^{-\alpha \lambda^2 t}.$$

Або, згідно з формулою для косинуса різниці:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda(\xi - x)) d\xi \right) e^{-\alpha \lambda^2 t}.$$

Для подальших викладок нам знадобиться широко відома теорема Фубіні. Вона формулюється так: нехай функції $f(x_1)$ та $g(x_2)$ можна подати у вигляді таких виразів: $f(x_1) = \int_{X_2} h(x_1, x_2) dx_2$, $g(x_2) = \int_{X_1} h(x_1, x_2) dx_1$, де X_1 та X_2 — множини, на яких визначені функції $f(x_1)$ та $g(x_2)$. $h(x_1, x_2)$ — функція обох аргументів, визначена в області $X_1 \times X_2$. При цьому f, g та h є інтегрованими на відповідних множинах. Тоді $\iint_{X_1 \times X_2} h(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{X_1} \left[\int_{X_2} h(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1 = \int_{X_1} \left[\int_{X_1} h(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2$.

У нашому випадку всі умови теореми Фубіні виконані (функція f є інтегрованою згідно з тим, що вона може бути представлена інтегралом Фур'є, добуток же $\cos(\lambda(\xi - x))e^{-\alpha\lambda^2 t}$ також є інтегрованим, як буде показано нижче) і ми можемо поміняти порядок інтегрування в (4.11):

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda(\xi - x)) e^{-\alpha\lambda^2 t} d\lambda \right) \quad (4.11)$$

Формула (4.11) виражає наш остаточний розв'язок. Однак, для практичного застосування він є досить незручний і не показує фізичного змісту. Виконаємо кілька нескладних перетворень для надання виразу (4.11) більш естетичного вигляду.

Розглянемо окремо інтеграл по λ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda(\xi - x)) e^{-\alpha\lambda^2 t} d\lambda \quad (4.12)$$

Для початку введемо заміну $\lambda = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha t}}$. Також введемо позначення $u = \frac{\xi - x}{\sqrt{\alpha t}}$.

З урахуванням цієї заміни, інтеграл запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega u) e^{-\omega^2} d\omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha t}} I(u)$$

Можна побачити, що при $u=0$, I по суті є інтеграл Пуассона, відповідно

$$I(0) = \sqrt{\pi}.$$

Сам інтеграл обчислимо, продиференціювавши його по u :

$$I'(u) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \sin(\omega u) e^{-\omega^2} d\omega. \quad (4.13)$$

Після інтегрування по частинах, отримаємо:

$$I'(u) = \frac{1}{2} e^{-\omega^2} \sin(\omega u) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{u}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega u) e^{-\omega^2} d\omega = \frac{-u}{2} I(u).$$

Тепер, інтегруючи по u , знайдемо $I(u) = C e^{-\frac{u^2}{4}}$. Постійна C знаходиться за допомогою (4.13) і дорівнює $\sqrt{\pi}$.

Повертаючись до старих змінних і підставляючи отриманий вираз для інтеграла в (4.12), отримаємо:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha \pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi.$$

Це і є наш фінальний розв'язок. Він виглядає більш компактно і більш придатний для практичних розрахунків, ніж формула (4.11).

Тепер, після того як ми отримали загальний розв'язок і привели його до зручного для вирішення практичних завдань вигляду, можемо розглянути частковий випадок із заданою функцією f .

Розглянемо наступну функцію:

$$f(x) = \begin{cases} T_0, & -x_0 < x < x_0 \\ 0, & x \notin (-x_0, x_0) \end{cases}. \quad (4.14)$$

Підставляючи її в (4.14), знайдемо:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi t}} \int_{-x_0}^{+x_0} T_0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi.$$

Даний інтеграл можна виразити через так звану функцію помилок

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

якщо провести заміну змінної $\frac{x-\xi}{2\sqrt{\alpha t}} = \mu$. З урахуванням цієї заміни інтеграл виразиться через функцію помилок у такий спосіб:

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left(\text{erf} \left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \text{erf} \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right).$$

Цікаво побачити еволюцію цього рішення з часом (Рис. 4.1):

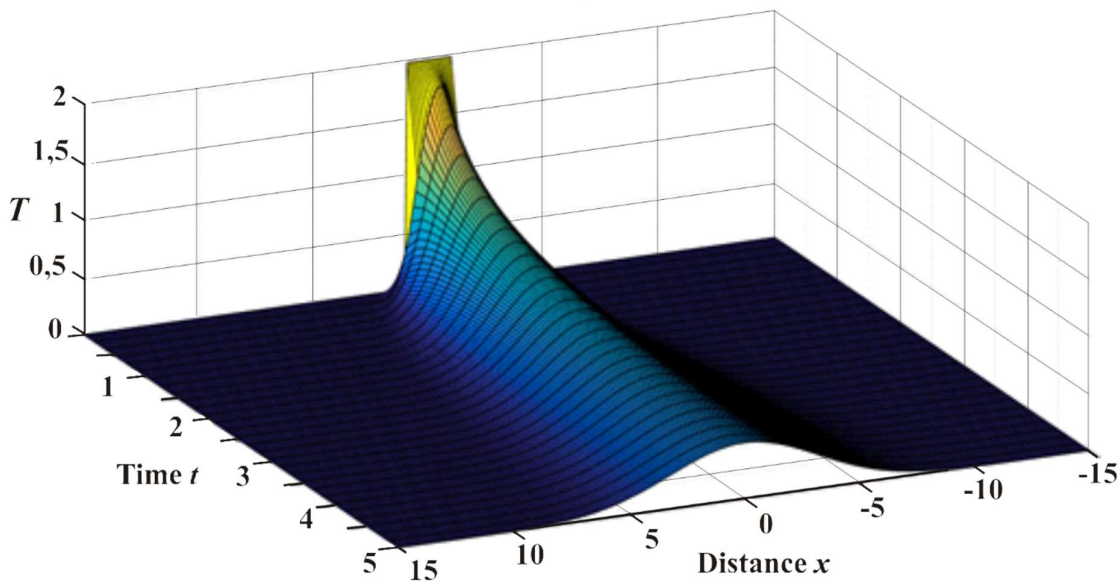


Рис. 4.1. Зміна розподілу температури з часом у випадку одновимірного нестационарного рівняння теплопровідності (тонкий нескінченний дрiт)

Тут $T_0 = 2$ та $\alpha = 1$. Як можна бачити, отримана залежність для поширення тепла в стрижні цілком відповідає нашим інтуїтивним уявленням.

4.3. Випадок малого внутрішнього опору

Розглянемо нагрівання деякого тіла від якогось початкового рівномірного температурного стану t_i . Якщо тіло має високий коефіцієнт теплопровідності, то його внутрішнім термічним опором можна знехтувати і вважати, що процес перенесення тепла контролюється виключно поверхневим опором.

При таких умовах в середині тіла в будь-який момент часу температурні градієнти відсутні (всередині тіла миттєво встановлюється однакова температура); такий процес назовемо нагріванням за законом Ньютона. Складемо для нього баланс теплоти:

$$\delta Q_\tau = \alpha(t_f - t_\omega)F d\tau = V\rho c dt.$$

Накладемо на рівняння умови, зробимо заміни:

$$t = t_{\omega} = \text{const} \ (Bi < 0.1); \text{ при } \tau = 0; t = t_0.$$

Підставляємо і, розділяючи змінні, отримаємо:

$$\frac{dt}{t_f - t} = \frac{\alpha F}{\rho c V} d\tau.$$

Інтегруючи отримуємо:

$$\ln(t_f - t) = -\frac{\alpha F}{\rho c V} \tau + \ln C.$$

Використовуючи граничні умови отримаємо:

$$\frac{t_f - t}{t_f - t_0} = e^{-\frac{\alpha F}{\rho c V} \tau}$$

Далі введемо заміну:

$$m = \frac{\alpha F}{\rho c V},$$

де m — темп нагрівання або охолодження. Отримане рішення показує, що температурне поле досягає стаціонарного стану при $\tau \rightarrow \infty$.

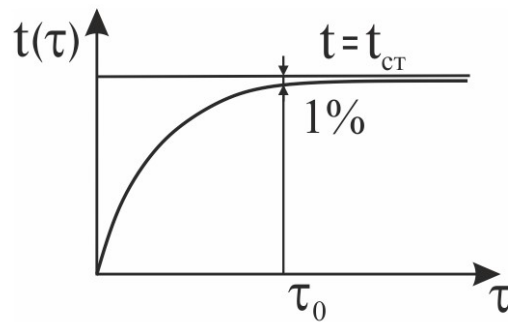


Рис. 4.2. Залежність температурного поля від часу

4.4. Випадок малого поверхневого опору

Перейдемо до розгляду протилежного випадку, тобто тіл, що володіють значним внутрішнім термічним опором.

Розглянемо нагрівання необмеженої пластини рівномірної товщини $L = 2\delta$. Нехай початковий розподіл температури в пластині описується деякою довільною функцією $t(x, \tau)$. Якщо внутрішній опір великий, ми можемо знехтувати зовнішнім тепловим опором, а це означає, що обидві лицьові поверхні $x = 0$ та $x = L$ в наступний після початкового момент часу миттєво приймають і надалі зберігають постійну температуру оточуючого середовища t_1 .

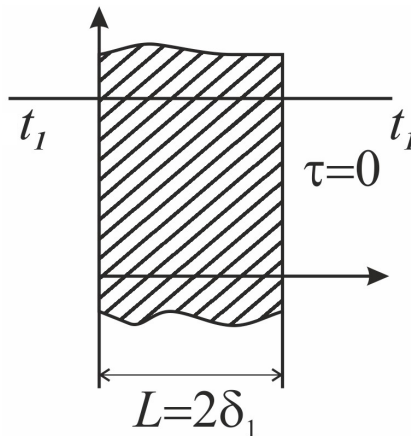


Рис. 4.3. Необмежена пластина рівномірної товщини

Розв'язок для температури, що змінюється з часом, має задовольняти диференціальні рівняння в часткових похідних (рівняння Фур'є):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (4.15)$$

А також початковим і граничним умовам:

$$\begin{aligned} T &= T_i(x) \text{ при } \tau = 0; (0 \leq x \leq L), \\ T &= 0 \text{ при } x = 0; x = L; \tau > 0, \end{aligned}$$

де для зручності вводиться заміна змінної $T = t - t_l$. Інтегруючи рівняння (4.15) методом розділення змінних, отримуємо вираз:

$$T_\mu = e^{-\mu^2 a \tau} (C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x),$$

де стала дорівнює $-\mu^2$. У цьому рішенні має бути $C_1 = 0$, щоб T перетворювалося в нуль при $x = 0$ для всіх $\tau > 0$. Оскільки T повинна дорівнювати нулю також і при $x = L$ то $\sin \mu L = 0$, звідки випливає, що $\mu = n\pi/L$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді частковий розв'язок приймає форму:

$$T = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a \tau}$$

Повний розв'язок є суперпозицією всіх часткових розв'язків, а константи залежать від n :

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a \tau}$$

І він повинен задовольняти початковій умові

$$T_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Цей результат відповідає розкладанню довільної функції $T_i(x)$ в ряд Фур'є по синусах, для якого постійна амплітуда C_2 визначається формулою

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L T_i(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Тоді остаточне рішення приймає вигляд:

$$T = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 F_0} \int_0^L T_i(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

де F_0 — число Фур'є. Розглянемо окремий випадок однорідної початкової температури $t_0 = \text{const}$.

$$t - t_1 = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 F_0} (t_0 - t_1) \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Взявши інтеграл і зробивши заміну $\frac{t-t_1}{t_0-t_1} = \theta = f\left(\frac{x}{L}; F_0\right)$ отримаємо

$$\theta = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 F_0}.$$

Скориставшись загальним виразом для температурного поля, знайдемо кількість теплоти

$$Q_{\tau} = 4 \left(\frac{\lambda F}{L}\right) (t_1 - t_0) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 F_0}\right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

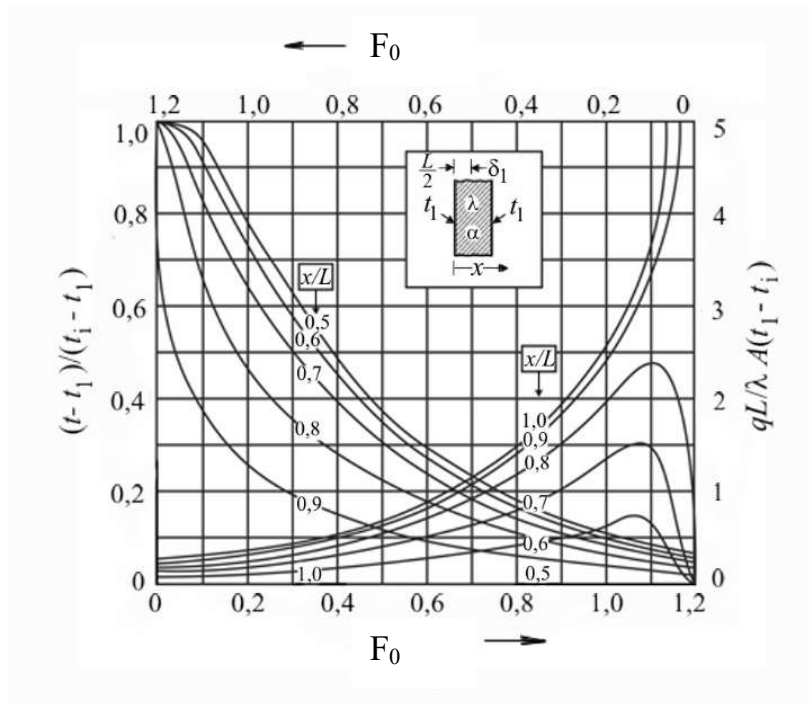


Рис. 4.4. Зміна температури і потік теплоти як функція числа Фур'є для необмеженої пластини при нехтуванні поверхневим опором

4.5. Загальний випадок скінченних внутрішнього та поверхневого опорів

Тепер розглянемо проміжний випадок коли внутрішній і зовнішній теплові опори співставні. Отримаємо розв'язки рівняння теплопровідності для необмеженої пластини, циліндра і кулі.

4.5.1. Необмежена пластина

Розглянемо пластину товщиною 2δ . Якщо товщина пластини мала в порівнянні з довжиною і шириною, то таку пластину можна вважати необмеженою. Це виражається в тому, що якщо направити вісь x перпендикулярно до площини пластини, то вздовж осей y і z температура мінятися не буде. Коефіцієнт тепловіддачі на всій поверхні пластини постійний і дорівнює α . Охолодження відбувається в середовищі з постійною температурою t_p . У початковий момент часу при $\tau = 0$ температура є деякою функцією $t(x, 0) = f(x)$. Відлік температури циліндра будемо вести від температури середовища, тобто $t - t_p = \theta$. При цих умовах рівняння теплопровідності приймає вигляд:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (4.16)$$

Граничні та початкові умови:

при $\tau = 0$ та $-\delta \leq x \leq \delta$

$$\theta = f(x) - t_p = F(x),$$

при $\tau > 0$ та $x = 0$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0,$$

при $\tau > 0$ та $x = \delta$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_{x=\delta}.$$

Розв'яжемо дане рівняння методом розділення змінних, представивши шукану функцію $\theta(x, \tau)$ як добуток функцій, кожна з яких залежить лише від τ та x , тобто $\theta(x, \tau) = \chi(x)T(\tau)$. Підставляючи цей вираз в (4.16) отримаємо:

$$a \frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)}.$$

Оскільки права частина — функція тільки x , а ліва — тільки τ , дане співвідношення може виконуватися, лише коли обидві частини рівності рівні константі. Для зручності виберемо цю константу як $-k^2$. Отримаємо два звичайні диференціальні рівняння:

$$\chi'' + k^2 \chi = 0.$$

$$T' = -ak^2T.$$

Розв'язки обох рівнянь є тривіальними і тому можемо відразу написати

$$\chi(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) \quad (4.17)$$

$$T = C_3 e^{-ak^2\tau}, \quad (4.18)$$

де C_1, C_2, C_3 — сталі.

З урахуванням (4.17) та (4.18) можемо записати частковий розв'язок (4.16):

$$\theta(x, \tau) = (C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)) C_3 e^{-ak^2\tau}.$$

Або, позначивши $A = C_1 C_3, B = C_2 C_3$:

$$\theta(x, \tau) = (A \cos(kx) + B \sin(kx)) e^{-ak^2\tau} \quad (4.19)$$

Використовуючи граничну умову при $x = 0$ знаходимо $B = 0$. З огляду на це, (4.19) приймає вигляд

$$\theta(x, \tau) = A \cos(kx) e^{-ak^2\tau}. \quad (4.20)$$

Застосовуючи до рівняння (4.20) граничну умову третього роду на поверхні пластини, отримаємо наступне рівняння для визначення параметра k :

$$\operatorname{ctg}(k\delta) = \frac{k\delta}{\frac{\alpha\delta}{\lambda}}. \quad (4.21)$$

Вираз $\frac{\alpha\delta}{\lambda}$ є безрозмірною величиною, що називається числом Біо і характеризує інтенсивність теплообміну на стінці пластини в порівнянні з

інтенсивністю теплообміну в самій пластині. Переходячи до безрозмірного параметру $\mu = k\delta$ перепишемо (4.21) у вигляді

$$\operatorname{ctg}(\mu) = \frac{\mu}{Bi}. \quad (4.22)$$

Аналіз трансцендентного рівняння (4.22) зручно проводити графічно. Позначимо $\operatorname{ctg}(\mu) = y_1$, $\frac{\mu}{Bi} = y_2$. Побудуємо графіки функцій y_1, y_2 :

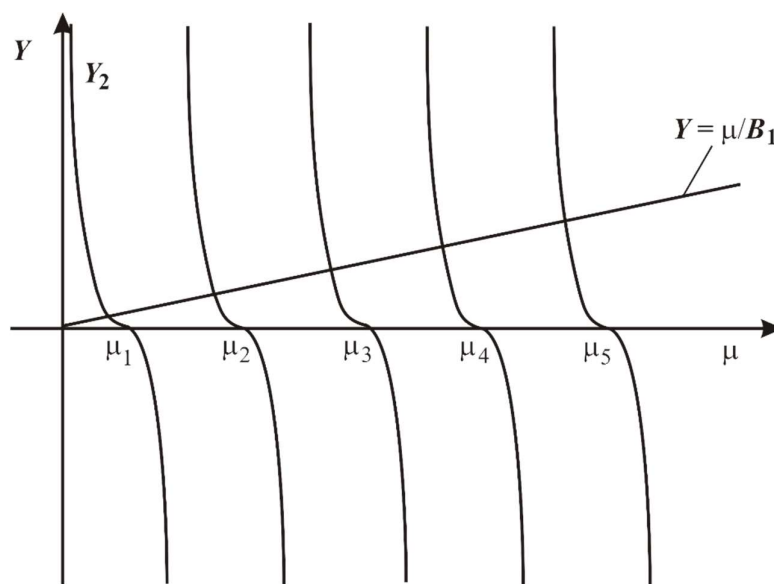


Рис. 4.5. Графічні розв'язки рівняння (4.22)

З рис. 4.5 видно, що рівняння (4.22) має безліч розв'язків, а самі корені представляють собою ряд зростаючих чисел. Тобто $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \dots$, $n = 1, 2, 3 \dots$. Точні значення коренів можна отримати за допомогою математичних пакетів, таких як Matlab, WolframAlpha, MathCad.

Загальний розв'язок рівняння (4.16) буде суперпозицією всіх часткових розв'язків з різними μ , що залежать від n :

$$\theta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (4.23)$$

Сталі A_n знаходяться з початкової умови. При $\tau = 0$, $\theta(x, 0) = F(x)$. Підставляємо в (4.23) і отримуємо

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \quad (4.24)$$

Цей вираз являє собою певний різновид розкладання функції $F(x)$ в ряд Фур'є. Для знаходження коефіцієнтів A_n помножимо обидві частини рівняння (4.24) на $\cos\left(\mu_m \frac{x}{\delta}\right)$, де μ_m — деякий корінь рівняння (4.22), і проінтегруємо від $-\delta$ до δ :

$$\int_{-\delta}^{\delta} F(x) \cos\left(\mu_m \frac{x}{\delta}\right) dx = \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_m \frac{x}{\delta}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx.$$

Можна бачити, що права частина даного рівняння складається з суми однотипних інтегралів. Це означає, що нам достатньо буде розглянути лише один з них:

$$I_{mn} = \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_m \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx. \quad (4.25)$$

Використовуючи формулу $2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$, обрахуємо інтеграл:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_m \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx = 2 \frac{\mu_n \sin \mu_m \cos \mu_n - \mu_m \sin \mu_n \cos \mu_m}{\mu_m^2 - \mu_n^2}.$$

Використовуючи (4.22) легко бачити, що для всіх $m \neq n$ інтеграли обертаються в нуль. При $m = n$ обчислення інтеграла (4.25) тривіальне і тому отримуємо:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx = \delta \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right) \quad (4.26)$$

З урахуванням отриманих результатів, напишемо загальний розв'язок для θ :

$$\theta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \left[\int_{-\delta}^{\delta} F(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx \right]}{\delta(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (4.27)$$

Якщо в початковий момент часу $\tau = 0, \theta(x, 0) = \theta_0 = \text{const}$, то (4.27) отримає вигляд:

$$\theta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_0 2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}.$$

На цьому етапі корисно перейти до безрозмірних змінних: $x/\delta = X$, $a\tau/\delta^2 = \text{Fo}$, $\theta/\theta_0 = \Theta$. Де Fo називається числом Фур'є і являє собою безрозмірний час. Також зазначимо той факт, що Θ залежить від Bi , тому що μ_n визначаються числом Біо:

$$\Theta(X, \text{Fo}, \text{Bi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}} \quad (4.28)$$

Проаналізуємо отриманий розв'язок. У випадку, коли Bi дуже велике (на практиці $\text{Bi} > 100$), пряма $y_2 = \frac{\mu}{\text{Bi}}$ практично збігається з віссю абсцис, а значить корінь рівняння (4.22) визначаються просто як корінь рівняння $\text{ctg} \mu_n = 0$ і тому $\mu_n = (n - \frac{1}{2})\pi$. З фізичної точки зору велике число Біо означає, що тепловіддача на поверхні пластини відбувається набагато інтенсивніше, ніж теплообмін усередині самої пластини. У цьому випадку (4.28) набуває вигляду

$$\Theta(X, \text{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}},$$

де було враховано, що $\cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$, $\sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^{n+1}$.

Коли число Bi мале (на практиці $\text{Bi} < 0,1$), в нескінченній сумі в (4.28) слід залишити тільки перший член, тому що всі інші члени ряду дуже швидко

наближаються до нуля, оскільки $\mu_n \rightarrow (n-1)\pi$ та $\sin((n-1)\pi) \rightarrow 0$. Тепер, навпаки, теплообмін в пластині відбувається набагато інтенсивніше, ніж відбувається тепловіддача на поверхні, тому температура уздовж координати x буде змінюватися незначно. У цьому випадку (4.28) запишеться як

$$\Theta(X, Fo, Bi) = \cos(\mu_1 X) e^{-\mu_1^2 Fo}.$$

Проілюструємо вищесказане графіками отриманих рішень:

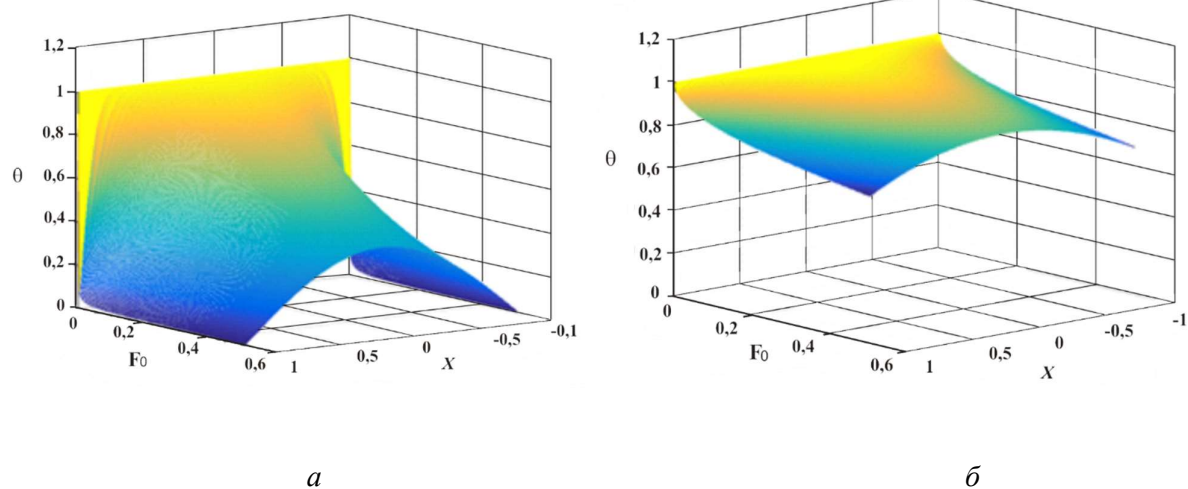


Рис. 4.6. Розв'язок рівняння (4.28) для випадку $Bi = 100$ (a) та $Bi = 0.5$ (b)

Як і очікувалося, при великому числі Біо температура на поверхні кулі практично відразу падає до температури навколишнього середовища, тоді як температура в центрі падає куди менш різко. Коли Bi мале, залежність температури від x незначна, і коли Fo ще не дуже велике, залежністю Θ від x можна знехтувати.

Можна показати, що в розв'язку (4.28) експонента швидко спадає і вже при $Fo > 0.3$ можна обмежитися лише першим членом ряду

$$\Theta(X, Fo, Bi) = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos(\mu_1 X) e^{-\mu_1^2 Fo}$$

Коефіцієнт $\frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1}$ залежить лише від числа Біо Bi . Позначимо його D_1 . Окрім того, для конкретного положення на пластині (наприклад $X=0$ в центрі пластини і $X=l$ на краю пластини) $\cos(\mu_1 X)$ теж є лише функцією числа Біо. Наприклад, для $X=l$ позначимо добуток $D_1 \cos(\mu_1)$ як $N(Bi)$, що є константою при заданому Bi . Тоді розв'язок (4.28) набуває вигляду

$$\Theta(X, Fo, Bi) = N(Bi)e^{-\mu_1^2 Fo}$$

Якщо побудувати графік даної функції в логарифмічному масштабі по осі Θ то це буде пряма. Тому при розв'язанні нестационарних задач теплопровідності зручно використовувати графічні розв'язки – номограми (рис. 4.7).

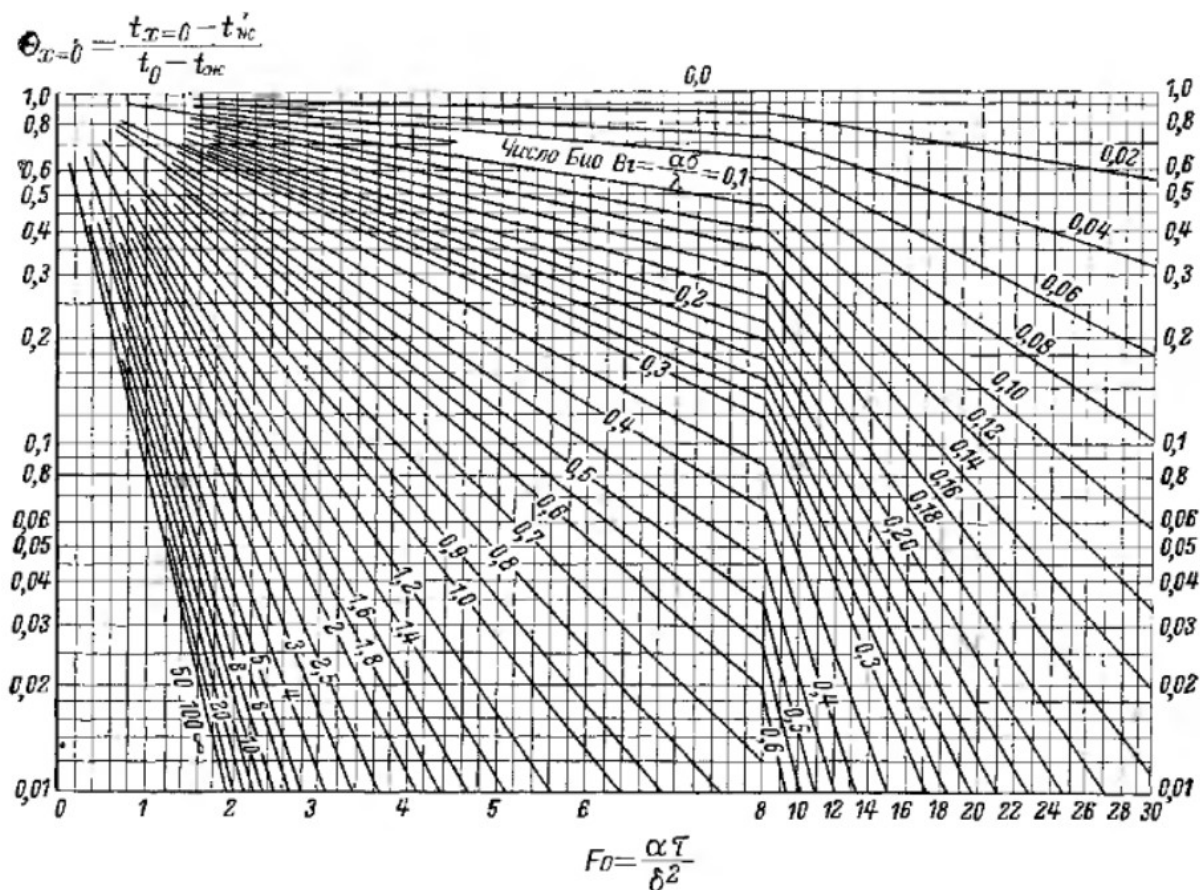


Рис. 4.7. Номограма Гейслера для температури центру необмеженої пластини з кінцевим поверхневим опором

Для того щоб дізнатись температуру в центрі пластини в певний момент часу потрібно необхідно обрахувати число Біо, знайти відповідку пряму на номограмі, обрахувати число Фур'є, знайти відносну безрозмірну температуру, що відповідає цьому числу Фур'є і, знаючи початкову температуру і температуру оточуючого середовища визначити температуру.

Приклад. Визначити температуру центру довгої, тонкої мідної пластини шириною 60 сантиметрів через 15 хвилин після початку охолодження, якщо її початкова температура t_0 становила 500°C , температура оточуючого середовища $t_f = 25^\circ\text{C}$, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 1000 \text{ Вт/м}^2 \text{ К}$, температуропровідність міді a складає $1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, теплопровідність міді $\lambda = 300 \text{ Вт/м К}$.

Розв'язок. Визначимо число Біо. $Bi = \frac{1000 \cdot 0,3}{300} = 1$. Визначимо число Фур'є, що відповідає 3 секундам $F_0 = \frac{at}{\delta^2} = \frac{1 \cdot 10^{-4} \cdot 900}{0,09} = 1$. За номограмою на рис. 4.7 визначаємо відносну безрозмірну температуру $\frac{t-t_f}{t_0-t_f} = 0,16$. Звідси температура в центрі пластини через 15 хвили н становитиме 101°C .

4.5.2. Необмежений циліндр

Нескінченно довгий циліндр з радіусом r_0 віддає тепло навколишньому середовищу через свою бічну поверхню; коефіцієнт тепловіддачі α у всіх точках поверхні однаковий і залишається постійним протягом всього періоду охолодження. Температура середовища постійна. У початковий момент часу при $\tau = 0$ температура є деякою функцією $t(r, 0) = f(r)$. Відлік температури циліндра будемо вести від температури середовища, тобто $t - t_f = \theta$. При цих умовах рівняння теплопровідності приймає вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (4.29)$$

Граничні та початкові умови:

при $\tau = 0$ та $0 \leq r \leq r_0$

$$\theta = f(r) - t_f = F(r),$$

при $\tau > 0$ та $r = 0$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)_{r=0} = 0,$$

при $\tau > 0$ та $r = r_0$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_{r=r_0}.$$

Слідуючи загальному підходу, будемо шукати розв'язок у вигляді добутку функцій, одна з яких залежать лише від τ , а інша лише від r , тобто $\theta(r, \tau) = \chi(r)T(\tau)$. Підставляючи в (4.29) і роблячи розділення змінних, отримуємо два диференціальних рівняння:

$$T'(\tau) + ak^2T(\tau) = 0. \quad (4.30)$$

$$r^2\chi''(r) + r\chi(r) + k^2\chi(r) = 0, \quad (4.31)$$

де k^2 — константа.

Розв'язок рівняння (4.30) було отримано в попередньому пункті, тобто можемо відразу написати

$$T = Ae^{-ak^2\tau},$$

де A — стала інтегрування.

Розв'язком рівняння (4.31), як відомо (див. додаток), є суперпозиція функцій Бесселя і Неймана нульових порядків:

$$\chi(r) = C_1J_0(kr) + C_2Y_0(kr) \quad (4.32)$$

Оскільки $\theta(r, \tau)$ всюди обмежена, а $Y_0(kr)$ має особливість в точці $r = 0$, то ми повинні взяти $C_2 = 0$. З огляду на це, (4.32) буде мати вигляд:

$$\chi(r) = C_1 J_0(kr).$$

Перейдемо до безрозмірного параметру $\mu = kr_0$. З огляду на це позначення запишемо частковий розв'язок рівняння (4.29):

$$\theta(r, \tau) = C J_0\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) e^{-\mu^2 \frac{a\tau}{r_0^2}},$$

де ми ввели позначення $C = C_1 A$.

Використовуючи граничну умову на стінці циліндра, а також враховуючи, що $J_0'(x) = -J_1(x)$, отримаємо наступне рівняння для μ :

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi}. \quad (4.33)$$

Аналіз трансцендентного рівняння (4.33) зручно проводити графічно.

Позначимо $\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = y_1$, $\frac{\mu}{Bi} = y_2$. Побудуємо графіки функцій y_1, y_2 :

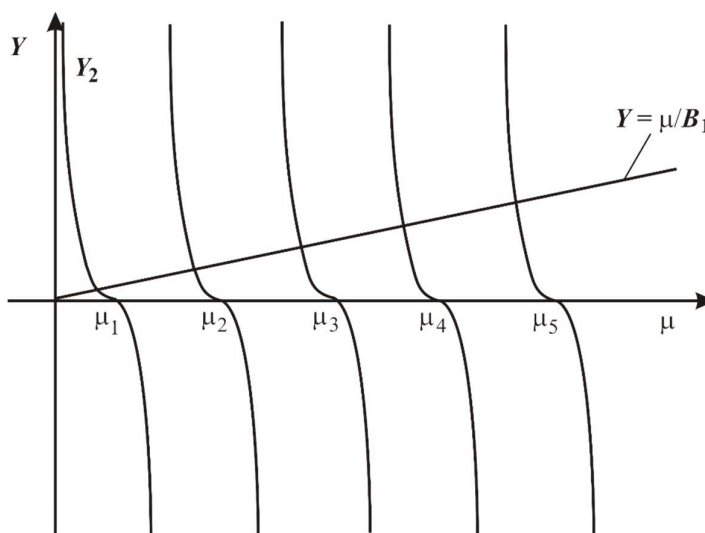


Рис. 4.8. До розв'язку рівняння (4.33)

З рис. 4.8 видно, що рівняння (4.33) має нескінченну кількість розв'язків, а самі корені є рядом зростаючих чисел, тобто $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \dots$, $n = 1, 2, 3 \dots$. Точні значення коренів можуть бути отримані за допомогою різних математичних пакетів, таких як Matlab, Wolfram Alpha, MathCad.

Повний розв'язок буде суперпозицією всіх часткових розв'язків з різними μ , що залежать від n :

$$\theta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{r_0^2}}, \quad (4.34)$$

Сталі C_n знаходяться з початкової умови. При $\tau = 0$ $\theta(r, 0) = F(r)$. Підставляючи в (4.34) $\tau = 0$ отримуємо

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right).$$

Цей вираз є розкладом функції $F(r)$ в узагальнений ряд Фур'є за функціями Бесселя. Для знаходження коефіцієнтів C_n помножимо обидві частини даного виразу на $r J_0 \left(\mu_m \frac{r}{r_0} \right)$, де μ_m — деякий корінь рівняння (4.33), і проінтегруємо від 0 до r_0 :

$$\int_0^{r_0} r F(r) J_0 \left(\mu_m \frac{r}{r_0} \right) dr = \int_0^{r_0} r J_0 \left(\mu_m \frac{r}{r_0} \right) \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right) dr. \quad (4.35)$$

Зробивши заміну змінних $x = \frac{r}{r_0}$, перепишемо (4.35):

$$\int_0^1 x F(x r_0) J_0(\mu_m x) dx = \int_0^1 x J_0(\mu_m x) \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\mu_n x) dx. \quad (4.36)$$

Права частина (4.36) складається з суми однотипних інтегралів. Це означає, що нам достатньо буде розглянути лише один з них:

$$I_{mn} = \int_0^1 x J_0(\mu_m x) J_0(\mu_n x) dx .$$

Позначивши $J_0(\mu_m x) \equiv u_m$, $J_0(\mu_n x) \equiv u_n$, напишемо рівняння Бесселя, яким задовольняють u_m та u_n :

$$x^2 u_m'' + x u_m' + \mu_m^2 x^2 u_m = 0 \quad (4.37)$$

$$x^2 u_n'' + x u_n' + \mu_n^2 x^2 u_n = 0 \quad (4.38)$$

Домножимо (4.37) на $\frac{u_n}{x}$, а (4.38) на $\frac{u_m}{x}$, віднімемо отримані рівняння і проінтегруємо від 0 до 1:

$$\begin{aligned} (\mu_m^2 - \mu_n^2) \int_0^1 x u_m u_n dx + \int_0^1 (u_m' u_n - u_n' u_m) dx + \\ + \int_0^1 x (u_m'' u_n - u_n'' u_m) dx = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Останній доданок в (4.39) проінтегруємо по частинах. Скорочуючи однакові члени, отримаємо:

$$\int_0^1 x u_m u_n dx = \frac{[x(u_n' u_m - u_m' u_n)]_0^1}{(\mu_m^2 - \mu_n^2)}.$$

Підставляючи межі, і пам'ятаючи, що ми позначили $u_m \equiv J_0(\mu_m x)$, $u_n \equiv J_0(\mu_n x)$, а також $J_0'(x) = -J_1(x)$, перепишемо (4.38) у вигляді:

$$\int_0^1 x J_0(\mu_m x) J_0(\mu_n x) dx = \frac{\mu_m J_1(\mu_m) J_0(\mu_n) - \mu_n J_1(\mu_n) J_0(\mu_m)}{(\mu_m^2 - \mu_n^2)}. \quad (4.40)$$

Використовуючи (4.33), можна бачити, що в разі $m \neq n$, права частина (4.40) обертається в нуль. Це означає, що в сумі в (4.35) залишається тільки один інтеграл, де n дорівнює m . В (4.40) при $n = m$ маємо невизначеність виду $0/0$. Для її розкриття, перейдемо до границі $\mu_m \rightarrow \mu_n$ і використаємо правило Лопітала:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu_m \rightarrow \mu_n} \frac{\mu_m J_1(\mu_m) J_0(\mu_n) - \mu_n J_1(\mu_n) J_0(\mu_m)}{(\mu_m^2 - \mu_n^2)} = \\ = \lim_{\mu_m \rightarrow \mu_n} \frac{J_1(\mu_m) J_0(\mu_n) + \mu_m J_1'(\mu_m) J_0(\mu_n) - \mu_n J_1(\mu_n) J_0'(\mu_m)}{2\mu_m} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Параметр $J_1'(\mu_m)$ знайдемо з рівняння Бесселя для $J_0(\mu_m)$:

$$-\mu_m^2 J_1'(\mu_m) - \mu_m J_1(\mu_m) + \mu_m^2 J_0(\mu_m) = 0. \quad (4.42)$$

Оскільки $J_0'(\mu_m) = -J_1(\mu_m)$. Використовуючи (4.42), знайдемо остаточно з (4.41):

$$\int_0^1 x J_0^2(\mu_m x) dx = \frac{J_1^2(\mu_m) + J_0^2(\mu_m)}{2}.$$

В кінцевому рахунку, повертаючись до початкової змінної r , напишемо вираз для C_n :

$$C_n = \frac{2 \int_0^{r_0} r F(r) J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr}{r_0^2 (J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n))} \quad (4.43)$$

Підставляючи (4.43) в (4.34):

$$\theta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r_0^2 (J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n))} \left[\int_0^{r_0} r F(r) J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right) dr \right] J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{r_0^2}}. \quad (4.44)$$

Якщо в початковий момент часу $\tau = 0$, $\theta(r, 0) = \theta_0 = \text{const}$, інтеграл в (4.44) виражається як

$$\int_0^{r_0} r \theta_0 J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right) dr = \frac{r_0^2}{\mu_n} \theta_0 J_1(\mu_n).$$

В цьому випадку вираз для θ приймає вигляд:

$$\frac{\theta(r, \tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n (J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n))} J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{r_0^2}}. \quad (4.45)$$

Позначимо $\theta/\theta_0 = \Theta$ — безрозмірна температура, $r/r_0 = R$ — безрозмірна координата, $a\tau/r_0^2 = \text{Fo}$ — число Фур'є. З урахуванням цих позначень перепишемо в безрозмірному вигляді (4.45):

$$\Theta(R, \text{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n (J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n))} J_0(\mu_n R) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}} \quad (4.46)$$

Насправді Θ є також функцією Bi , тому що μ_n є функціями числа Біо.

У випадку, коли Bi дуже велике (на практиці $\text{Bi} > 100$), пряма $y_2 = \frac{\mu}{\text{Bi}}$ практично збігається з віссю абсцис, а значить корені рівняння (4.33) визначаються просто як корені рівняння $J_0(\mu_n) = 0$. З фізичної точки зору велике число Біо означає, що тепловіддача на стінці циліндра відбувається набагато інтенсивніше, ніж теплообмін усередині самого циліндра. У цьому випадку (4.46) набуває вигляду:

$$\Theta(R, \text{Fo}, \text{Bi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)} J_0(\mu_n R) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}}.$$

Коли Bi маленьке (на практиці $Bi < 0,1$), в нескінченній сумі в (4.46) слід залишити тільки перший член, тому що всі μ_n окрім μ_1 дуже близькі до коренів J_1 . Сам μ_1 при цьому виявляється близьким до нуля. У цьому випадку (4.46) набуває вигляду:

$$\Theta(R, Fo, Bi) = J_0(\mu_1 R) e^{-\mu_1^2 Fo}.$$

Фізично це означає, що тепло в циліндрі поширюється настільки швидко, що температура практично не залежить від радіальної змінної. Математично це випливає з того, що $J_0(\mu_1 R)$ слабо відрізняється від одиниці для будь-якого значення R в силу того, що μ_1 дуже мале. Проілюструємо вищесказане графіками отриманих рішень – рис. 4.9, 4.10.

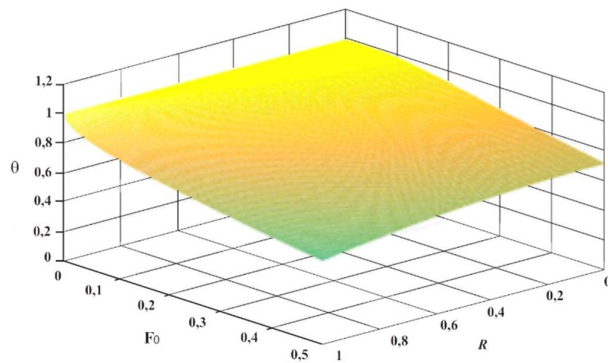


Рис. 4.9. Розв'язок для випадку $Bi = 50$

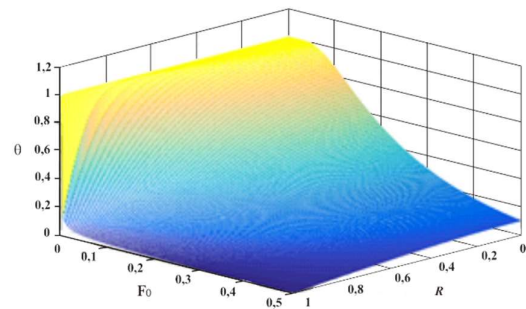


Рис. 4.10. Розв'язок для випадку $Bi = 0,5$

Як і очікувалося, при великому числі Біо температура біля стінки циліндра практично відразу падає до температури навколишнього середовища, тоді як температура на осі циліндра спадає куди менш різко. При малому числі Біо можемо спостерігати порівняно слабку залежність температури від радіальної змінної, що відповідає найбільшому коефіцієнту теплопровідності.

Аналогічно до того, як це було зроблено для пластини, при числах Фур'є більших за 0,3 в (4.46) можна залишити лише один член ряду. І для даної відстані від осі циліндру залежність відносної безрозмірної температури від числа Фур'є

буде прямою в логарифмічному масштабі по осі ординат. Нахил прямої буде визначатися числом Біо (рис. 4.11). Це дає змогу користуватися графічним розв'язком нестационарного рівняння теплопровідності (номограмою) для знаходження температури в певний момент часу. Розрахунок проводиться за тим самим принципом, що й у прикладі для пластини

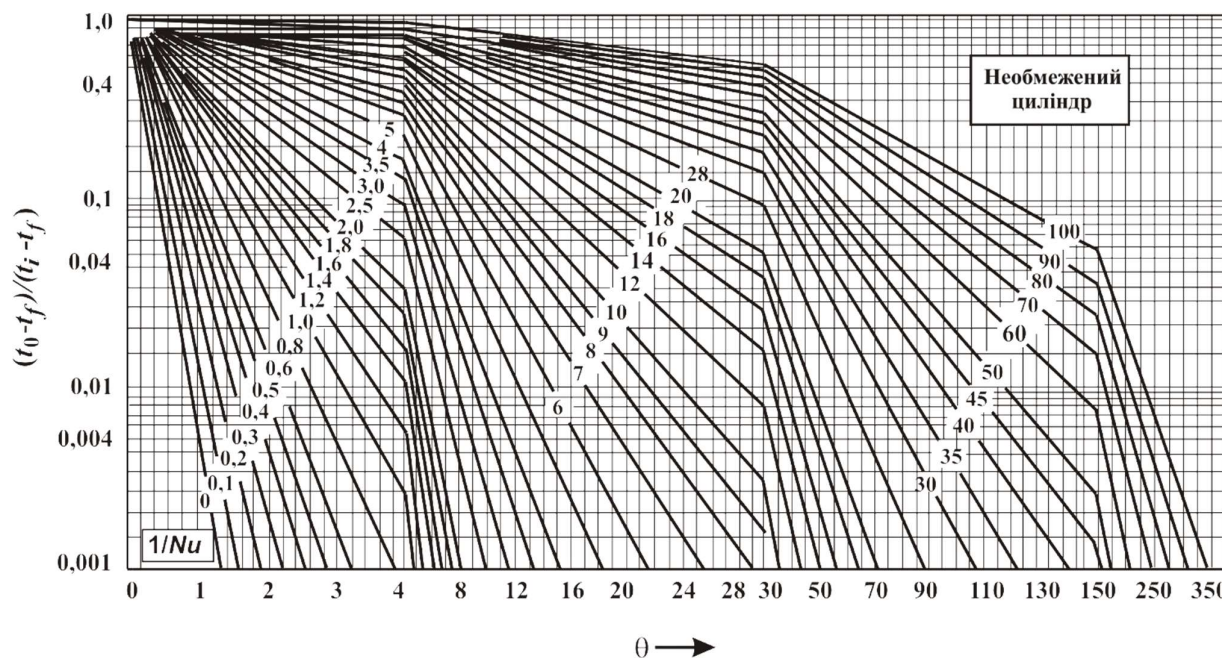


Рис. 4.11. Номограма для нескінченного циліндра

4.5.3. Куля

Розглянемо охолодження кулі з радіусом r_0 в середовищі з постійною температурою t_f та з постійним коефіцієнтом тепловіддачі α на його поверхні. У початковий момент часу при $\tau = 0$ температура є деякою функцією $t(r, 0) = f(r)$. Відлік температури кулі будемо вести від температури середовища, тобто $t - t_f = \theta$. При цих умовах рівняння теплопровідності приймає вигляд:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (4.47)$$

Граничні та початкові умови:

при $\tau = 0$ та $0 \leq r \leq r_0$

$$\theta = f(r) - t_f = F(r),$$

при $\tau > 0$ та $r = 0$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)_{r=0} = 0,$$

при $\tau > 0$ та $r = r_0$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_{r=r_0}.$$

Далі, представляючи шукану функцію у вигляді $\theta(r, \tau) = \chi(r)T(\tau)$ і підставляючи в рівняння (4.47), отримуємо наступні диференціальні рівняння:

$$T'(\tau) + ak^2T(\tau) = 0, \quad (4.48)$$

$$r^2\chi''(r) + 2r\chi(r) + k^2\chi(r) = 0. \quad (4.49)$$

Рівняння (4.48) зустрічалося нам вже неодноразово і його розв'язок дається виразом $T = De^{-ak^2\tau}$. Для вирішення рівняння (4.49) введемо нову функцію $\varphi(r) = r\chi(r)$. Підставляючи її в (4.49) отримаємо

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0.$$

Розв'язком цього рівняння виступає лінійна комбінація $\sin(kr)$ та $\cos(kr)$. Для функції χ можемо написати:

$$\chi(r) = \frac{A \sin(kr)}{r} + \frac{B \cos(kr)}{r}.$$

Функція χ повинна бути скінченна у всіх точках, в тому числі в точці $r = 0$. Оскільки $\frac{\cos(kr)}{r}$ в нулі перетворюється в нескінченність, то ми повинні взяти $B = 0$. Функція $\frac{\sin(kr)}{r}$ в точці $r = 0$, очевидно, буде скінченною, тому що при $r \rightarrow 0$ $\sin(kr) \sim kr$.

Перейдемо до безрозмірного параметру $\mu = kr_0$. З урахуванням цього позначення запишемо частковий розв'язок рівняння (4.47):

$$\theta = C \frac{\sin\left(\mu \frac{r}{r_0}\right)}{r} e^{-\mu^2 \frac{a\tau}{r_0^2}} \quad (4.50)$$

Використовуючи граничну умову на стінці кулі, отримуємо наступне трансцендентне рівняння для визначення μ :

$$tg\mu = -\frac{\mu}{(Bi-1)}, \quad (4.51)$$

Як і в попередніх випадках, це рівняння має нескінченну кількість розв'язків. Корені цього рівняння можуть бути знайдені за допомогою різних математичних пакетів, таких як Matlab, Wolfram Alpha, MathCad. Пронумеруємо тепер корені рівняння (4.51) в порядку зростання: $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \dots, n = 1, 2, 3 \dots$, і знайдемо загальний розв'язок рівняння (4.47) як суперпозицію часткових розв'язків (4.50) з різними μ_n :

$$\theta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sin\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right)}{r} e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{r_0^2}}.$$

Використаємо початкову умову

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sin\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right)}{r}. \quad (4.52)$$

Помножимо обидві частини (4.52) на $r \sin\left(\mu_m \frac{r}{r_0}\right)$ та проінтегруємо від 0 до r_0 :

$$\int_0^{r_0} r F(r) \sin\left(\mu_m \frac{r}{r_0}\right) dr = \int_0^{r_0} \sin\left(\mu_m \frac{r}{r_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr. \quad (4.53)$$

Зробивши заміну змінної $x = \frac{r}{r_0}$, перепишемо (4.53):

$$r_0 \int_0^1 x F(x r_0) \sin(\mu_m x) dx = \int_0^1 \sin(\mu_m x) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\mu_n x) dx. \quad (4.54)$$

Розглянемо один із інтегралів в сумі в правій частині (4.54):

$$I_{mn} = \int_0^1 \sin(\mu_n x) \sin(\mu_m x) dx. \quad (4.55)$$

Перетворюючи вираз за допомогою формули $2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ інтегруємо, а потім, зводячи до спільного знаменника і скорочуючи однакові члени, отримуємо:

$$\int_0^1 \sin(\mu_n x) \sin(\mu_m x) dx = \frac{\mu_n \sin \mu_m \cos \mu_n - \mu_m \sin \mu_n \cos \mu_m}{\mu_m^2 - \mu_n^2}.$$

З огляду на (4.51) легко бачити, що при $m \neq n$ інтеграли обертаються в нуль. При $m = n$ праву частину даного рівняння розглядаємо як границю при $\mu_m \rightarrow \mu_n$. Використовуючи правило Лопітала отримаємо:

$$\int_0^1 \sin^2(\mu_n x) dx = \frac{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n}{2\mu_n}.$$

Тепер можемо написати вираз для визначення коефіцієнтів C_n :

$$C_n = \frac{2\mu_n \int_0^1 r F(r) \sin\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr}{r_0(\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n)}.$$

Напишемо остаточно розв'язок для θ :

$$\theta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n \left[\int_0^1 r F(r) \sin\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr \right] \sin\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right)}{r_0(\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n)} \frac{1}{r} e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{r_0^2}}. \quad (4.56)$$

Якщо в початковий момент часу $\tau = 0$, $\theta(r, 0) = \theta_0 = \text{const}$, то (4.56) приймає вигляд

$$\Theta(R, Fo, Bi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n(\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n)} \frac{\sin(\mu_n R)}{R} e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (4.57)$$

де ми перейшли до безрозмірних змінних $r/r_0 = R$, $a\tau/r_0^2 = Fo$, $\theta/\theta_0 = \Theta$, а також явно вказали той факт, що Θ залежить від Bi , оскільки μ_n визначаються числом Біо.

У випадку, коли Bi дуже велике (на практиці $Bi > 100$), пряма $y_2 = \frac{-\mu}{Bi}$ практично збігається з віссю абсцис, а значить корені рівняння (4.51) визначаються просто як корені рівняння $tg \mu_n = 0$ і тому $\mu_n = n\pi$. З фізичної точки зору велике число Біо означає, що тепловіддача на поверхні кулі відбувається набагато інтенсивніше, ніж теплообмін усередині самої кулі. У цьому випадку (4.57) набуває вигляду:

$$\Theta(R, Fo, Bi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{\sin(n\pi R)}{n\pi R} e^{-n^2 \pi^2 Fo}.$$

Коли Bi маленьке (на практиці $Bi < 0,1$), в нескінченній сумі в (4.57) слід залишити тільки перший член, тому що всі інші члени ряду дуже швидко наближаються до нуля. Тепер, навпаки, теплообмін в кулі відбувається набагато інтенсивніше, ніж відбувається віддача на поверхні, тому залежність температури від радіальної змінної буде незначною. У цьому випадку (4.56) запишеться як

$$\Theta(R, Fo, Bi) = \frac{\sin(\mu_1 R)}{R} e^{-\mu_1^2 Fo}.$$

Проілюструємо вищесказане графіками отриманих розв'язків:

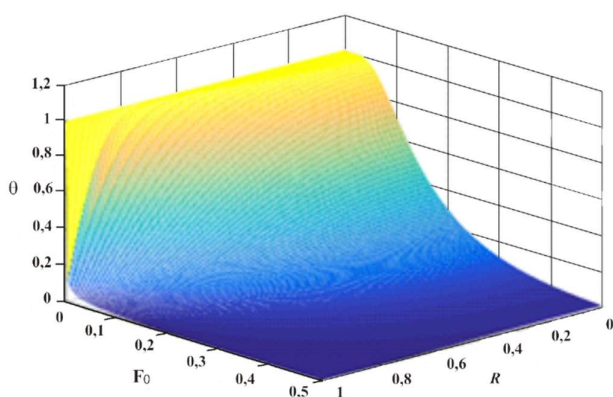


Рис. 4.12. Рішення для випадку $Bi = 200$

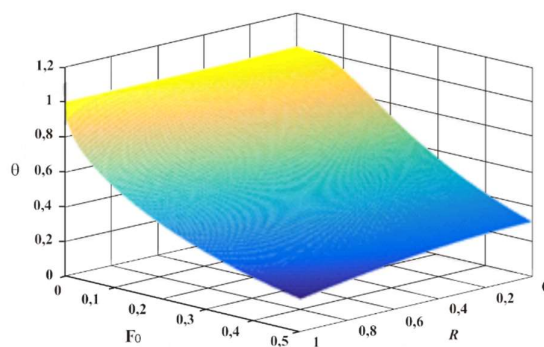


Рис. 4.13. Рішення для випадку $Bi = 1,2$

Як і очікувалося, при великому числі Біо температура на поверхні кулі практично відразу падає до температури навколишнього середовища, тоді як температура в центрі падає куди менш різко. Коли Bi мале, залежність температури від радіальної в кожен момент часу змінної дуже близьке до горизонтальної прямої, так як тепло дуже швидко розподіляється уздовж радіуса кулі зважаючи на великий коефіцієнт теплопровідності.

Питання для самоконтролю

1. Запишіть одновимірне нестационарне рівняння теплопровідності без джерел теплоти для необмеженої пластини, циліндра і кулі
2. Запишіть вираз для числа Біо. Який у нього фізичний зміст? Яке число Біо на практиці вважається малим, а яке великим?
3. Як поводить себе система у випадку з малим поверхневим тепловим опором і великим? Які числа Біо відповідають цим випадкам?
4. Які граничні умови варто використати у випадку малого поверхневого опору?
5. Що таке темп нагрівання (охолодження)?
6. Запишіть розв'язок рівняння теплопровідності у випадку великого поверхневого опору
7. Запишіть вираз для числа Фур'є. Який в нього фізичний зміст?
8. Для яких значень числа Фур'є можна в загальному розв'язку рівняння теплопровідності у вигляді ряду обмежитись лише першим членом?
9. Від яких безрозмірних величин буде залежати безрозмірна температура у випадку нестационарного рівняння теплопровідності?
10. Який вигляд буде мати розв'язок рівняння теплопровідності як функція від числа Фур'є у логарифмічному масштабі по осі ординат?
11. Що таке номограмм? Для чого її використовують і як?

РОЗДІЛ 5. ТЕПЛООБМІН В СИСТЕМАХ З ОРЕБРЕННЯМ ТА ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

5.1. Теплопередача через оребрену стінку

Наявність оребрення на стінці дозволяє збільшити поверхню її контакту з теплоносієм і тим самим зменшити зовнішній термічний опір. При цьому зменшиться загальний термічний опір і збільшиться тепловий потік, а температура поверхні такої стінки наблизиться до температури омиваючого її середовища. Тому наявність ребер може використовуватися як засіб інтенсифікації процесу теплопередачі або як засіб зниження температури стінки.

Розглянемо теплопередачу через оребрену стінку (рис. 5.1).

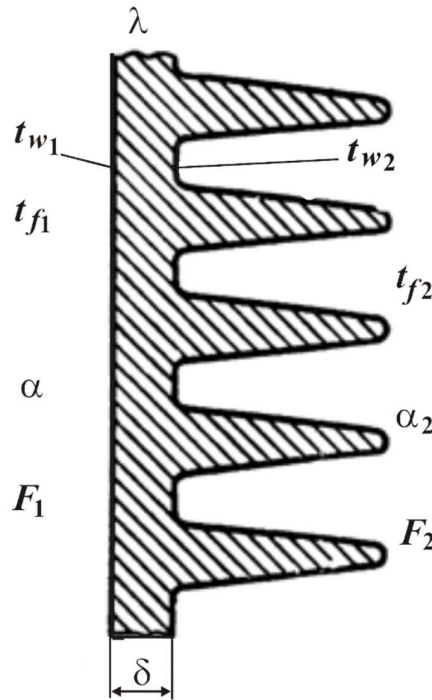


Рис. 5.1. Теплопередача через оребрену стінку

Температура оребрення змінюється по його довжині. При $t_{f1} > t_{f2}$ температура оребрення, рівна у його основі температурі поверхні між оребреннями t_{w2} , буде зменшуватися до їх кінця. Температуру середовища t_{f2} можна вважати незмінною для всієї поверхні, і тому ділянки поверхні ребра, віддалені від основи,

будуть передавати менше теплоти, ніж ділянки, розташовані поблизу основи ребра. Відношення теплоти, переданої поверхнею оребрення в навколишнє середовище \dot{Q}_p , до теплоти, яку ця поверхня могла б передати при постійній температурі стінки, що дорівнює температурі біля основи оребрення \dot{Q}'_p , називається коефіцієнтом ефективності оребрення:

$$\eta_p = \dot{Q}_p / \dot{Q}'_p.$$

Всі поверхні оребрення можуть мати однакову температуру тільки при нескінченній теплопровідності матеріалу, тому в реальних умовах $\eta_p < 1$. Чим різкіше змінюється температура уздовж оребрення, тим менше коефіцієнт його ефективності. Для короткого оребрення, виконаного з матеріалу з великою теплопровідністю, коефіцієнт ефективності близький до одиниці.

Визначимо тепловий потік через стінку, де гладка поверхня має площу F_1 , оребрена поверхня — F_2 . Площа F_2 складається з площі бічної поверхні ребер F_p і площі міжреберних ділянок F_m . При стаціонарному режимі передача теплоти від гарячого середовища до стінки, через стінку і від стінки до холодно середовищі при однаковому коефіцієнті теплообміну для всієї поверхні F_2 визначиться формулами:

$$\dot{Q} = \alpha_1 (t_{f1} - t_{w1}) F_1; \quad (5.1)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} (t_{f1} - t_{w1}) F_1; \quad (5.2)$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_p + \dot{Q}_m. \quad (5.3)$$

Оскільки $\dot{Q}_p = \eta_p \dot{Q}'_p = \eta_p \alpha_2 (t_{w2} - t_{f2}) F_p$ та $\dot{Q}_m = \alpha_2 (t_{w2} - t_{f2}) F_m$, то рівняння (5.3) можна переписати

$$\dot{Q}_m = \alpha_2(t_{w2} - t_{f2})(F_m + \eta_p F_p). \quad (5.4)$$

Виключивши з рівнянь (5.1), (5.2) та (5.4) температури t_{w1} й t_{w2} , знайдемо

$$\dot{Q} = (t_{f1} - t_{f2}) / \left[\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{1}{F_1} \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 (F_m + \eta_p F_p)} \right]. \quad (5.5)$$

Цьому рівнянню зручно надати вигляд

$$\dot{Q} = k_p (t_{f1} - t_{f2}) F_1,$$

де k_p — коефіцієнт теплопередачі оребреної стінки, який визначається формулою

$$k_p = 1 / \left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{F_1}{F_m + \eta_p F_p} \right]. \quad (5.6)$$

Для зручності аналізу впливу оребрення на інтенсивність теплопередачі спростимо формулу (5.5) в припущенні, що внутрішнім термічним опором стінки можна знехтувати, тобто прийняти $\eta_p = 1$ та $\frac{\delta}{\lambda} = 0$. В цих умовах

$$\dot{Q} = \Delta t / \left[\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{1}{\alpha_2 F_2} \right]. \quad (5.7)$$

Порівняємо теплопередачу через стінку (рис. 5.2), умови теплообміну якої з теплоносіями задані коефіцієнтами $\alpha_1 = 100$ Вт/(м²·К) та $\alpha_2 = 10$ Вт/(м²·К), з оребренням й без оребрення.

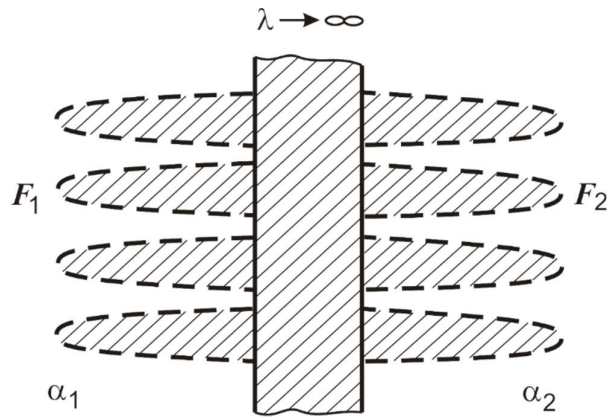


Рис. 5.2. Теплопередача через стінку з ребренням і без

Для стінки без ребер $F_1 = F_2 = 1 \text{ м}^2$, у відповідності з формулою (5.7), $\dot{Q}' = 9\Delta t$. Нехай тепер зі сторони, де $\alpha_1 = 100 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$, площа поверхні через ребрення збільшена в 10 раз, тобто $F_1 = 10 \text{ м}^2$, а друга поверхня стінки залишилась без зміни ($F_2 = 1 \text{ м}^2$). Тоді за формулою (5.7) отримується $\dot{Q} = 9,9\Delta t$ або $\dot{Q}/\dot{Q}' = 1,1$.

Якщо зберегти площу першої поверхні, а другу поверхню збільшити в 10 раз за рахунок ребрення (тобто $F_1 = 1 \text{ м}^2$, а $F_2 = 10 \text{ м}^2$), то за формулою (5.7) знайдемо, що $\dot{Q} = 50\Delta t$, тобто $\dot{Q}/\dot{Q}' = 5,5$.

Неоднаковий ефект від наявності ребрення на першій та другій поверхнях вийде через різні величини коефіцієнтів теплообміну. Якщо коефіцієнти теплообміну з двох сторін стінки неоднакові, то для інтенсифікації теплообміну треба стінку зробити ребреною з тої сторони, де коефіцієнт теплообміну має найменше значення.

Якщо ребра використовуються як засіб зниження температури стінки, то незалежно від значень α_1 та α_2 їх необхідно розмістити з боку холодного теплоносія. Температуру основи ребра можна визначити з формули (5.4):

$$t_{w2} = t_{f2} - \frac{\dot{Q}}{\alpha_2(F_M + \eta_p F_p)}.$$

Збільшення поверхні оребреної стінки в порівнянні зі стінкою без оребрення призводить до зменшення зовнішнього термічного опору, але при цьому виникає додатковий внутрішній термічний опір самого оребрення. Тому при невеликій теплопровідності матеріалу наявність оребрення на поверхні малоефективна або навіть викличе зменшення інтенсивності теплообміну.

Аналіз рівняння поширення теплоти в прямому ребрі постійної товщини показує, що оребрення зменшить загальний термічний опір за умови

$$2\lambda/(\alpha\delta) > 5,$$

де δ і λ — товщина ребра та його теплопровідність; α — коефіцієнт теплообміну ребра з навколишнім середовищем.

5.2. Температурне поле та коефіцієнт ефективності оребрення

Коефіцієнт ефективності оребрення потрібен для розрахунку теплопередачі через оребрену стінку. Значення цього коефіцієнта визначається з аналізу температурного поля оребрення.

Розглянемо передачу теплоти через тонке пряме ребро (тобто виконане на плоскій стінці), для якого зміною температури по поперечному перерізі можна знехтувати і вважати, що температура залежить тільки від координати x^* (рис. 5.3). Коефіцієнт теплообміну α і температура навколишнього середовища t_f вважаються однаковими для всієї поверхні ребра. Поперечний переріз ребра має площу f і периметр u . Теплопровідність матеріалу ребра λ .

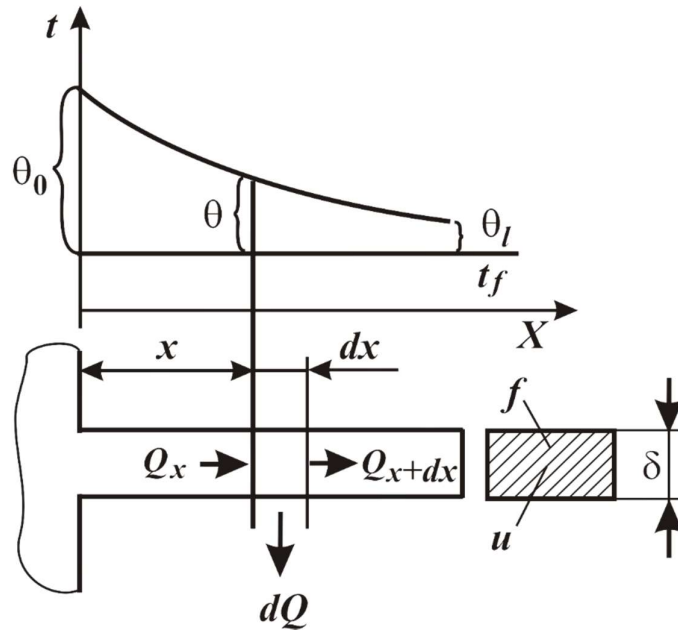


Рис. 5.3. Передача теплоти через тонке пряме ребро

При стаціонарному тепловому режимі тепловий потік \dot{Q}_x , який шляхом теплопровідності входить в елемент довжиною dx ребра, частково передається теплопровідністю уздовж ребра \dot{Q}_{x+dx} , частково розсіюється в навколишнє середовище $d\dot{Q}$. Отже

$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} + d\dot{Q}.$$

За законом Фур'є,

$$\dot{Q} = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_x f = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_x f;$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x+dx} f,$$

де $\theta = t - t_f$ — надлишкова температура в розглянутому перерізі ребра. Теплообмін з навколишнім середовищем визначається за формулою

$$d\dot{Q} = \alpha\theta u dx.$$

Таким чином, баланс теплоти можна переписати у вигляді

$$-\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_x f = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x+dx} f + \alpha\theta u dx.$$

Цьому виразу можна придати вигляду

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{\alpha u}{\lambda f} - \theta.$$

Інтеграл цього лінійного диференційного рівняння другого порядку відомий

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}, \quad (5.8)$$

де

$$m = \sqrt{\alpha u / (\lambda f)}. \quad (5.9)$$

Константи інтегрування C_1 та C_2 можна визначити з граничних умов:

$$\text{При } x = 0 \quad \theta = \theta_0;$$

$$\text{При } x = l \quad -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=l} = \alpha_l \theta_l.$$

Тут α_l та θ_l — коефіцієнт теплообміну та надлишкова температура для торця ребра.

Знехтуємо теплообміном торця ребра з навколишнім середовищем. В цьому випадку другу граничну умову можна записати у вигляді: при $x = l$ $(d\theta/dx)_{x=l} = 0$. Визначимо константи інтегрування, припускаючи, що

теплообміном торцевих поверхонь можна знехтувати. Підстановка граничних умов в рівняння (5.8) дає:

$$\theta_0 = C_1 + C_2;$$

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=l} = mC_1e^{ml} - mC_2e^{-ml} = 0.$$

З спільного вирішення цих рівнянь визначаються константи інтегрування:

$$C_1 = \theta_0 e^{-m} / [2ch(ml)]; C_2 = \theta_0 e^{ml} / [2ch(ml)].$$

Гіперболічний косинус виражається формулою

$$ch(ml) = (e^{ml} + e^{-ml})/2.$$

Підстановка констант інтегрування в формулу (5.8) приводить до наступного рівняння температурного поля в ребрі:

$$\theta = \theta_0 ch[m(l-x)]/ch(ml). \quad (5.10)$$

Надлишкова температура на кінці ребра визначається з цієї формули при $x = l$:

$$\theta_l = \theta_0 / ch(ml). \quad (5.11)$$

Вся теплота, що розсіюється ребром, передається теплопровідністю через переріз основи. Тому

$$\dot{Q}_p = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} f. \quad (5.12)$$

З рівняння (5.10) отримуємо

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} = -m\theta_0 th(ml), \quad (5.13)$$

де гіперболічний тангенс

$$th(ml) = (e^{ml} - e^{-ml}) / (e^{ml} + e^{-ml}).$$

Підстановка виразу (5.13) в рівняння (5.12) приводить до наступної формули для теплового потоку:

$$\dot{Q}_p = \theta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} th(ml).$$

Ця формула не враховує теплообміну торця ребра з навколишнім середовищем. Якщо прийняти, що коефіцієнти теплообміну торця і бічної поверхні ребра однакові, то теплообмін торця можна врахувати подовженням бічної поверхні ребра на половину його товщини і при розрахунку теплового потоку замість довжини ребра використовувати ефективну довжину $l_{\text{еф}} = l + \delta/2$, де δ — товщина ребра (рис.5.3).

Тоді розрахункова формула для теплового потоку прийме вигляд

$$\dot{Q}_p = \theta_0 \sqrt{\alpha u p \lambda f} th(ml_{\text{еф}}). \quad (5.14)$$

Отриманий вираз дозволяє визначити коефіцієнт ефективності прямого ребра постійної товщини:

$$\eta_p = \frac{\dot{Q}_p}{\dot{Q}'_p} = \frac{\theta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} th(ml_{\text{еф}})}{\alpha \theta_0 u l_{\text{еф}}} = \frac{th(ml_{\text{еф}})}{ml_{\text{еф}}}. \quad (5.15)$$

Величина m визначається за формулою (5.9).

У прямих і кільцевих (циліндричних) звужуючих ребрах так само, як і в кільцевих ребрах постійної товщини, площа перетину ребра, через яку проходить тепловий потік, і периметр цього перетину змінюються по довжині ребра. Тому розгляд теплового балансу елемента ребра призводить в цих випадках до диференціальних рівнянь, які інтегруються в циліндричних функціях (функції Бесселя), а розрахункові формули для оцінки температурного поля і теплового потоку навіть для довгих ребер мають досить складний вигляд.

5.3. Розрахунок оребрення змінного перерізу

Розглянемо спрощений спосіб розрахунку ребер із змінним по довжині ребра перерізом (рис. 5.4, а), заснований на заміні такого ребра, що звужується, прямим ребром постійної товщини з урахуванням невідповідності розрахункової схеми дійсним умовам передачі теплоти за допомогою поправки. Спрощений спосіб дає таку ж точність, як і розрахунок за формулами, отриманими безпосереднім інтегруванням диференціальних рівнянь.

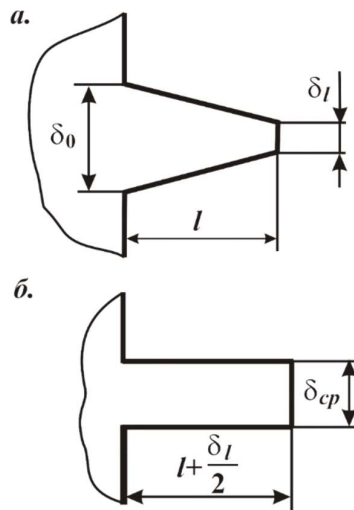


Рис. 5.4. Ребро, що звужується (а) та пряме ребро (б)

Пряме ребро постійної товщини, яке прийняте в якості розрахункової схеми (рис. 5.4, б), має таку ж ширину, як розрахункове ребро, а довжина та товщина його визначаються рівністю:

$$l_{\text{еф}} = l + \delta_l/2; \delta_{\text{ср}} = (\delta_0 + \delta_l)/2.$$

Густина теплового потоку з поверхні ребра постійного перерізу визначається виразом

$$q^* = \dot{Q}_p^*/F_p^*, \quad (5.16)$$

де \dot{Q}_p^* — тепловий потік від прямого ребра, який визначається рівнянням (5.14); F_p^* — площа бокової поверхні цього ребра.

Теплота, яка передається ребром, що звужується, визначається формулою

$$\dot{Q}_p^* = \varepsilon_c F_p q^*, \quad (5.17)$$

де F_p — площа бокової поверхні теплообміну ребра, що звужується; ε_c — поправка. Значення поправки залежить від ступеня звуження ребра δ_l/δ_0 та від співвідношення надлишкових температур θ_l^*/θ_0 ребра постійної товщини, яке визначається формулою (5.11).

Підрахуємо коефіцієнт ефективності ребра, що звужується, з урахуванням формул (5.16), (5.17) та (5.14):

$$\eta_p = \frac{\dot{Q}_p}{\dot{Q}_p^*} = \frac{\varepsilon_c F_p q^*}{\alpha \theta_0 F_p} = \frac{\varepsilon_c \dot{Q}_p^*}{\alpha \theta_0 F_p^*} = \frac{\varepsilon_c \theta_0 \sqrt{au} l f th(ml_{\text{еф}})}{\alpha \theta_0 u l_{\text{еф}}}.$$

Остаточно отримуємо

$$\eta_p = \varepsilon_c \frac{th(ml_{e\phi})}{ml_{e\phi}} = \varepsilon_c \eta_p^*.$$

Бічний профіль ребра, що звужується має вигляд трапеції або трикутника, в останньому випадку $\delta_l = 0$.

Треба зауважити, що використовувана в розрахунку надлишкова температура θ_l^* дещо відрізняється від дійсної надлишкової температури на кінці ребра, що звужується, θ_l . Для точної оцінки температурного поля і величини θ_l треба користуватися формулами, які отримані шляхом інтегрування диференційного рівняння для ребра, що звужується.

Аналогічно розраховується теплообмін для кільцевого ребра постійної товщини (рис. 5.5, а). Розрахункова схема такого ребра (рис. 5.5, б) — пряме ребро шириною 1 м, товщиною, рівної товщині кільцевого ребра, і довжиною

$$l_{e\phi} = R - r + \delta/2, \quad (5.18)$$

де R та r — зовнішній та внутрішній радіуси ребра.

Тепловий потік через кільцеве ребро та коефіцієнт його ефективності визначається формулами:

$$\dot{Q}_p = \varepsilon_k F_p q^*;$$

$$\eta_p = \varepsilon_k \frac{th(ml_{e\phi})}{ml_{e\phi}} = \varepsilon_k \eta_p^*.$$

Поправочний коефіцієнт ε_k визначається по відношенню надлишкових температур θ_l^*/θ_0 та відношенню радіусів R/r .

Для кільцевого ребра, що звужується, приблизно можна записати

$$\dot{Q}_p = \varepsilon_k \varepsilon_c F_p q^*;$$

$$\eta_p = \varepsilon_k \varepsilon_c \frac{th(ml_{ef})}{ml_{ef}} = \varepsilon_k \varepsilon_c \eta_p^*.$$

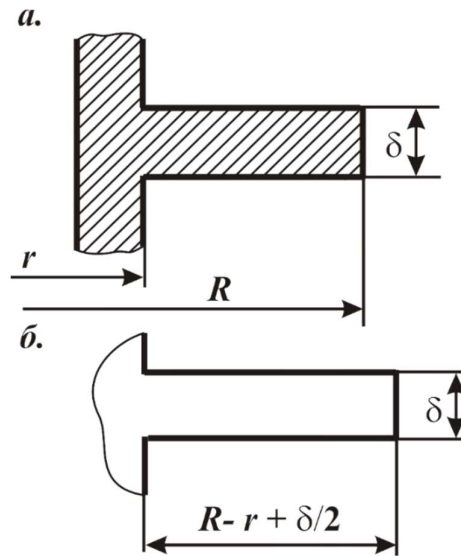


Рис. 5.5. Кільцеві ребра постійної товщини

Тут густина теплового потоку q^* визначається для плоского ребра шириною 1 м, довжиною, підрахованої за формулою (5.18), і товщиною, рівній напівсумі товщини кільцевого ребра біля основи і на кінці.

5.4. Оребрена стінка мінімальної маси

При створенні оребреної стінки важливо обрати такі конструктивні параметри ребер, які при заданій степені інтенсифікації теплообміну мали би мінімальну масу.

Маса прямого ребра постійної товщини δ та ширини L визначається формулою

$$m_p = AL\rho,$$

Де $A = \delta l$ — площа повздовжнього перерізу ребра; ρ — густина матеріалу.

При постійній масі ребра параметри δ та l можуть змінюватися при умові, що $\delta l = \text{const}$. Оптимальними будуть такі параметри, які при $m_p = \text{const}$ забезпечуть максимум переданої ребром теплоти.

Для ребра, яке передає теплоту в навколишнє середовище в основному в наслідок контакту, при $A = \text{const}$ умова максимального теплового потоку має вигляд

$$l/\sqrt{\delta} = \sqrt{\lambda/\alpha}.$$

Конструктивні параметри, які відповідають цій умові, характеризують ребро мінімальної маси.

Форма повздовжнього перерізу також впливає на масу ребра при заданому тепловому потоці. Е. Шмідт показав, що ребро має мінімальну масу, якщо густина теплового потоку (або температурний градієнт) по довжині ребра не змінюється. Для прямого ребра ця умова виконується у випадку, якщо контури його утворені дугами кола (рис. 5.6)

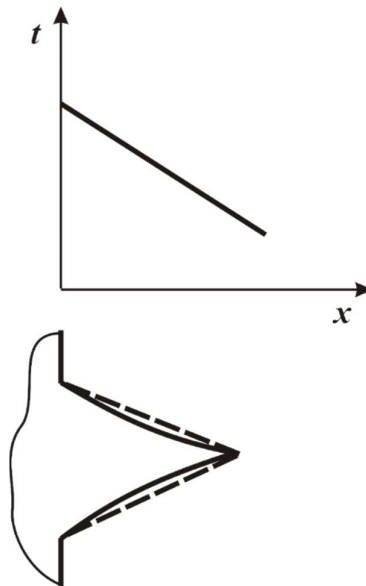


Рис. 5.6. Оребрена стінка мінімальної маси

Різниця в масі ребер з криволінійними та прямолінійними (пунктир на рис. 5.6) твірними складає всього близько 4%, тому з технологічних міркувань більш доцільно використовувати ребра з трикутними профілями.

Для ребер з трикутними профілями умова мінімальної маси має вигляд

$$l/\sqrt{\delta} = 0,925\sqrt{\lambda/\alpha},$$

Де δ — товщина ребра біля основи.

При оптимальному співвідношенні конструктивних параметрів і однаковим тепловим потоком маса ребра з трикутним профілем в 1,44 разу менше маси ребра постійної товщини.

Оптимальні параметри знайдені також для випромінюючих ребер. Так, для прямого ребра постійної товщини при $T_f = 0$ мінімальна маса ребра забезпечується при виконанні співвідношення

$$\frac{\delta}{l^2} = 2,486 \cdot 10^{-8} \frac{\varepsilon_{\text{пр}} C_0}{\lambda} T_0^3.$$

Суттєвий вплив на масу ребер має матеріал. При заданому тепловому потоці маса ребер збільшується пропорційно відношенню ρ/λ . Це відношення для мідного і сталевого ребра більше, ніж для алюмінієвого, в 1,96 та 11,8 разу відповідно.

Щоб збільшити поверхню дотику оребреної стінки з теплоносієм, треба зменшити товщину кожного ребра та збільшити число ребер (тобто зменшити крок ребер). Якщо загальна маса не змінюється, то при $L = \text{const}$ та $l = \text{const}$ загальний поперечний переріз ребер не залежить від її числа.

Збільшення числа ребер, а відповідно, зменшення її товщини обмежується умовами теплообміну в міжреберному просторі. Коли при конвективному теплообміні відстань між ребрами стає менше двох товщин примежевого шару, тоді завдяки взаємодії примежевих шарів зменшується коефіцієнт тепловіддачі та

ефективність ребер погіршується. Досліди показують, що взаємодія турбулентних примежевих шарів не має суттєвого впливу на інтенсивність теплообміну, тому допустима відстань між ребрами можна визначати за формулою ламінарного примежевого шару при $Re \leq Re_{кр}$.

Експериментально встановлено, що зменшення відстані між ребрами від $2\delta_{п.ш.}$ ($\delta_{п.ш.}$ — товщина ламінарного примежевого шару) до $1,12\delta_{п.ш.}$ слабо відображається на інтенсивності теплообміну.

Взаємне розташування випромінюючих ребер вибирається так, щоб не створювати перешкоди для подачі потоків енергії випромінювання до поверхні ребер.

5.5. Теплопровідність пористої стінки

Пористі матеріали знаходять велике застосування в таких конструкціях, як високотемпературні теплообмінники, турбінні лопатки, реактивні сопла та ін. На практиці охолодження пористих структур досягається нагнітанням рідини або газу через капіляри твердого тіла. Процес теплообміну в таких пористих системах досить важкий. При вирішенні задачі передбачається, що вся передача теплоти всередині плоскої пластини здійснюється за рахунок теплопровідності через тверду фазу і що температури твердого тіла і рідини майже не відрізняються один від одного в будь-якій точці пористої структури. Ці припущення суттєво спрощують рішення задачі.

Розглянемо показану на рис. 5.7 пласку пластину з постійним коефіцієнтом теплопровідності λ_c . Розміри пластини в напрямках y та z великі і температурне поле всередині пластини можна вважати одномірним; останнє справедливе і для температури охолоджуючої рідини, тобто $t = t(x)$ при $0 \leq x \leq \delta$ та $t_p = t_p(x)$ при $-\infty \leq x \leq 0$.

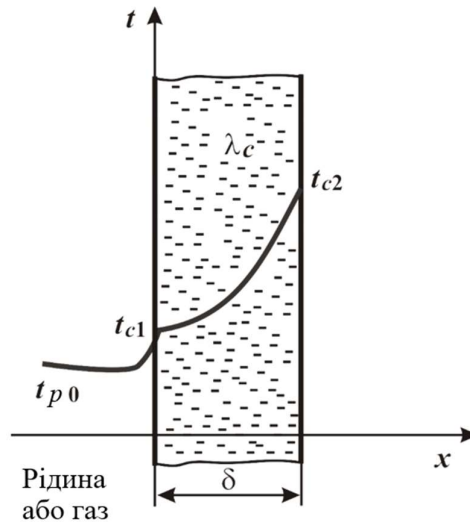


Рис. 5.7. Плaska пластина з постійним коефіцієнтом теплопровiдностi λ_c .

На поверхні пластини при $x = \delta$ температура стінки рівна t_{c2} . Температура нагріваючої вздовж віссi Ox через пластину рідини при $x \rightarrow -\infty$ рівна t_{p0} . Температури t_{c2} та t_{p0} відомі. Задана питома масова витрата охолоджувальної рідини G , $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, теплоємність c_{pp} і теплопровiдність λ_p якої постійні. Необхідно знайти розподіл температури в такій пористій стінці.

Будемо розглядати пористість пластини p як відношення об'єму пор до всього об'єму матеріалу. Для рівномірної пористості можна вважати, що на одиниці поверхні, нормальній до напрямку потоку рідини, переріз для проходу рідини $f_p = p$, а переріз твердого скелета, який приймає участь в теплопровiдності, рівна $f_c = 1 - f_p = 1 - p$. Зазначимо також, що якщо питома масова витрата натікаючої рідини рівна G , то масова витрата всередині пластини буде дорівнювати G/p .

Процес переносу теплоти в такому пористому тілі можна представити як теплопровiдність самої пластини і теплообмін між твердим тілом і рідиною, протікаючої через пори пластини.

Густина теплового потоку за рахунок теплопровiдності самої пластини в перерізах x та $x + dx$ запишемо:

$$q_x = -\lambda_c \frac{dt}{dx} (1 - p)$$

та

$$q_{x+dx} = -\lambda_c \frac{d}{dx} \left(t + \frac{dt}{dx} dx \right) (1 - p).$$

В умовах стаціонарного режиму зміна теплового потоку на ділянці dx виникне у зв'язку з теплообміном між твердим тілом і протікаючої через пори рідини, тобто

$$dq = q_x - q_{x+dx} = Gc_{pp} dt$$

або

$$-\lambda_c \frac{dt}{dx} (1 - p) + \lambda_c \frac{dt}{dx} (1 - p) + -\lambda_c \frac{d^2 t}{dx^2} (1 - p) dx = Gc_{pp} dt.$$

Відповідно, для ділянки $0 \leq x \leq \delta$ диференціальне рівняння запишеться:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{Gc_{pp}}{\lambda_c(1-p)} \frac{dt}{dx} \cong 0. \quad (5.19)$$

Якщо позначити

$$\frac{Gc_{pp}}{\lambda_c(1-p)} = \xi_c,$$

То співвідношення (5.19) запишеться:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \xi_c \frac{dt}{dx} = 0.$$

Аналогічним чином можна отримати диференціальне рівняння й для ділянки $-\infty \leq x \leq 0$:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \xi_p \frac{dt}{dx} = 0, \quad (5.20)$$

де

$$\xi_p = \frac{G c_{pp}}{\lambda_p}.$$

Загальний розв'язок рівняння (5.20) має вигляд:

$$t = C_1 e^{\xi_c x} + C_2.$$

Сталі C_1 та C_2 визначаються з граничних умов: при $x = 0$ $t = t_{c_1}$ та при $x = \delta$ $t = t_{c_2}$.

Після визначення сталих C_1 та C_2 отримуємо для ділянки $0 \leq x \leq \delta$:

$$t = t_{c_2} + \frac{t_{c_2} - t_{c_1}}{e^{\xi_c \delta} - 1} (e^{\xi_c x} - 1). \quad (5.21)$$

Для рівняння (5.20) загальний розв'язок має вигляд:

$$t_p = C_3 e^{\xi_p x} + C_4.$$

Це рівняння має задовольняти граничним умовам для потоку рідини:

При $x = -\infty$ $t_p = t_{p0}$;

При $x = 0$ $\lambda_p \frac{dt_p}{dx} = \lambda_c (1 - p) \frac{dt}{dx}$.

З граничних умов знаходимо, що $C_4 = t_{p0}$ та $C_3 = \frac{t_{c2}-t_{c1}}{e^{\xi_c\delta}-1}$,

Тоді розв'язок для (5.20) запишеться:

$$t_p = t_{p0} + \frac{t_{c2}-t_{c1}}{e^{\xi_c\delta}-1} e^{\xi_p x}, \quad (-\infty \leq x \leq 0). \quad (5.22)$$

На основі (5.22) з рівняння (5.21) можна виключити невідому температуру t_{c1} . При $x = 0$

$$t_p = t_{c1} = t_{p0} + (t_{c2} - t_{p0})e^{-\xi_c\delta}.$$

Підставивши це значення t_{c1} в рівняння (5.21), отримаємо остаточний вираз для розподіл температури в пористій пластині ($0 \leq x \leq \delta$):

$$\frac{t-t_{p0}}{t_{c2}-t_{p0}} = e^{-\xi_c\delta\left(1-\frac{x}{\delta}\right)}. \quad (5.23)$$

Якщо безрозмірну температуру пластини $\frac{t-t_{p0}}{t_{c2}-t_{p0}}$ позначити як Θ , рівняння (5.23) можна записати в наступному вигляді:

$$\Theta = e^{-\xi_c\delta\left(1-\frac{x}{\delta}\right)}.$$

Середня температура в пористій пластині для заданого значення $\xi_c\delta$, яка визначається інтегралом $\bar{\Theta} = 1/\delta \int_0^\delta \Theta dx$, рівна:

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{t}-t_{p0}}{t_{c2}-t_{p0}} = \frac{1}{\xi_c\delta} (1 - e^{-\xi_c\delta}). \quad (5.24)$$

Якщо в якості параметра вибрати $\xi_c \delta$, залежність (5.23) можна представити, як показано на рис. 5.8. Також для відповідних значень $\xi_c \delta$ нанесена середня температура, яка розрахована за рівнянням (5.24).

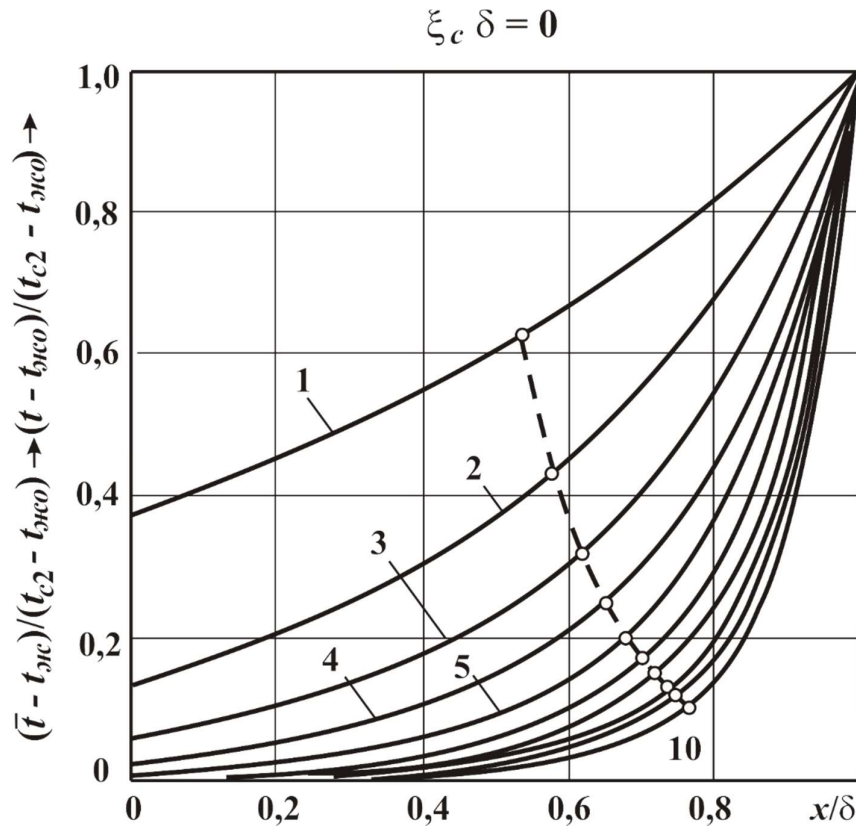


Рис. 5.8 Розподіл температури та середня температура в пористій пластині

При вирішенні задачі про розподіл температур в пористій стінці з випарним охолодженням при інших граничних умовах передбачалося, що пори малого діаметру рівномірно розподілені по об'єму плоскої пластини і пронизують її в поперечному напрямку (рис. 5.9). Витрати рідини через пори G_p , кг/м²; температури рідини та стінки в будь-якому даному перерізі однакові; фізичні параметри не залежать від температури.

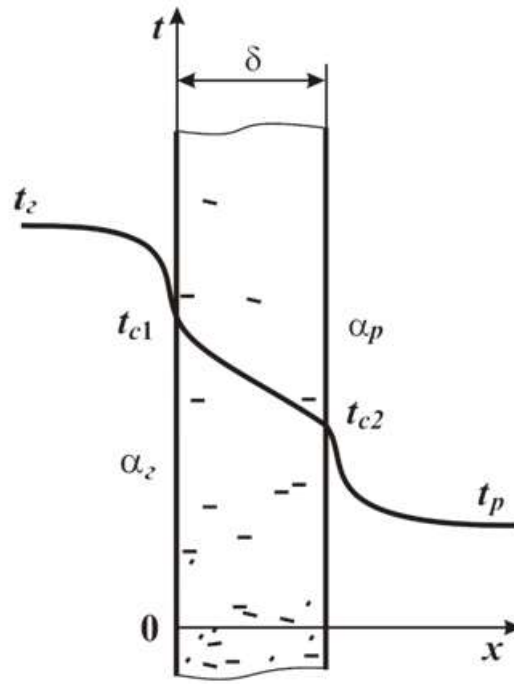


Рис. 5.9 Пористе охолодження пластини (граничні умови третього роду)

Рівняння теплопровідності та граничні умови в цьому випадку мають вигляд:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{G_p c_{pp}}{\lambda} \frac{dt}{dx} = 0; \quad (5.25)$$

$$\alpha_r(t_r - t_{c1}) - G_p r = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=0}; \quad (5.26)$$

$$\alpha_p(t_{c2} - t_p) = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=\delta}, \quad (5.27)$$

Де (крім позначень, які показані на рис. 5.9) r — теплота пароперетворення; c_{pp} — теплоємність рідини; α_r та α_p — коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях стінки, направлених відповідно до газу та рідини.

Коефіцієнт теплопровідності λ в рівнянні (5.25) в загальному випадку має враховувати теплопровідність твердого скелету стінки і охолоджуючої рідини.

Для металевих пористих стінок, які мають високий коефіцієнт теплопровідності та малий сумарний об'єм пор, теплопровідністю рідини можна знехтувати. В цьому випадку, як і в попередній задачі, можна приймати $\lambda = \lambda_c(1 - p)$.

Опустивши проміжні роз'яснення, приведемо остаточне рішення рівняння (5.25) при граничних умовах (5.26) та (5.27):

$$t = t_r - \frac{G_p r}{\alpha_r} - \frac{\left[(t_r - t_p) - \frac{G_p r}{\alpha_r}\right]}{(1 + k_r) - (1 - k_p)e^{-\xi c \delta}} [1 + k_r - e^{-\xi x}], \quad (5.28)$$

Де

$$k_r = \frac{G_p c_{p,p}}{\alpha_r}; \quad k_p = \frac{G_p c_{p,p}}{\alpha_p}; \quad \xi = \frac{G_p c_{p,p}}{\lambda}.$$

Якщо охолодження пористої стінки виконується без випарювання охолоджуючої рідини, тобто $r = 0$, то рівняння (5.28) приймає вигляд:

$$t = t_r - \frac{t_r - t_p(1 + k_r - e^{-\xi x})}{(1 + k_r) - (1 - k_p)e^{-\xi x}}.$$

Питання для самоконтролю

1. Запишіть формулу теплового потоку через ребренну стінку.
2. Порівняйте теплопередачу через стінку з ребрами й без.
3. Запишіть формулу для теплового потоку через тонке пряме ребро.
4. Як визначається коефіцієнт ефективності прямого ребра постійної товщини?
5. Запишіть формулу для розрахунку теплоти, яка передається ребром змінного перерізу та його коефіцієнта ефективності.
6. Як запишеться тепловий потік та коефіцієнт ефективності для кільцевого ребра, що звужується?

7. Якій умові відповідає ребро мінімальної маси і як впливає на неї форма поперечного перерізу?
8. Які є оптимальні параметри для випромінюючих ребер?
9. Як визначається теплопровідність пористої стінки?
10. Запишіть рівняння теплопровідності та граничних умов для пористої стінки з випарним охолодженням.

ДОДАТОК А. ФУНКЦІЇ БЕССЕЛЯ

Конкретні приклади завдань, які приводять до рівнянь Бесселя, можна знайти в розділах 3 та 4 даного посібника. Тут займемось безпосередньо пошуком розв'язків цих рівнянь і дослідженням властивостей цих розв'язків.

Рівнянням Бесселя порядку ν називається наступне диференціальне рівняння:

$$x^2 \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x^2} + x \frac{\partial y_\nu}{\partial x} + (x^2 - \nu^2) y_\nu = 0, \quad (\text{A1})$$

а y_ν — його розв'язком. Параметр ν , що входить в рівняння, є дійсним додатнім числом. Зазначимо, оскільки ν входить в рівняння в другому ступені, то якщо y_ν є розв'язком, то і $y_{-\nu}$ також є розв'язком.

Дійсний вигляд функції J_ν можна шукати у вигляді так званого узагальненого степеневого ряду:

$$y_\nu = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{A2})$$

При цьому $a_0 \neq 0$.

Підстановка в (A1) дає

$$x^r(a_0 r^2 - a_0 \nu^2) + x^{r+1}((r+1)^2 a_1 - \nu^2 a_1)) + x^{r+2}((r+2)^2 a_2 - \nu^2 a_2 + a_0) + \dots + x^{r+n}((r+n)^2 a_n - \nu^2 a_n + a_{n-2}) + \dots = 0. \quad (\text{A3})$$

В силу лінійної незалежності всіх ступенів x , коефіцієнти при кожному ступені x повинні бути рівні нулю.

Це дає:

$$\left\{ \begin{array}{l} (r^2 - v^2)a_0 = 0 \\ (r+1)^2 - v^2 a_1 = 0 \\ \dots \\ ((r+n)^2 - v^2)a_2 + a_{n+2} = 0 \\ \dots \end{array} \right. \quad (\text{A4})$$

З першого рівняння слідує $r = \pm v$. Для визначеності виберемо $r = v$, і в подальшому будемо позначати розв'язок, що відповідає додатньому v , як J_v .

Якщо $v \neq 1/2$, то з першого рівняння виходить $a_1 = 0$. З n -го рівняння системи (A4) отримаємо рекурентне співвідношення для коефіцієнтів a_n :

$$a_n = - \frac{a_{n-2}}{(r+n)^2 - v^2} \quad (\text{A5})$$

При $r = v$ можна написати

$$a_n = - \frac{a_{n-2}}{(2n+v)n} \quad (\text{A6})$$

Далі, оскільки $a_1 = 0$, то з системи (A4) випливає, що всі a_n з непарними індексами також дорівнюватимуть нулю, тобто $a_1 = a_3 = \dots = a_{2k+1} \dots = 0$.

Для парних a_n отримаємо

$$a_{2k} = - \frac{a_{2k-2}}{2^2(v+k)k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(v+k)(v+k-1)\dots(v-1)k!} \quad (\text{A7})$$

Оскільки вихідне рівняння є лінійним, то вибір a_0 нічим не обмежений. По суті, вибір того чи іншого a_0 (від якого залежать всі інші коефіцієнти) означає просто множення розв'язку на ту чи іншу сталу. З огляду на це, виберемо a_0 , як це прийнято, рівним

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \quad (\text{A8})$$

Тут $\Gamma(x)$ — Гамма-функція. Ця функція задовільняє наступним співвідношенням:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(k+1) = k!, \quad k \in N \quad (\text{A9})$$

З урахуванням цих співвідношень, а також з урахуванням (A8), вираз (A7) набуває вигляду

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)}, \quad k \in N \quad (\text{A10})$$

З урахуванням виразу для a_{2k} напишемо остаточний розв'язок:

$$J_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)} \quad (\text{A11})$$

Остання рівність, визначена для всіх $\nu \geq 0$. При виводі (A11) прийнято $r = \nu$. Але, як зазначалося вище, якщо J_ν є розв'язком, то і $J_{-\nu}$ також є розв'язком. Функція $J_{-\nu}$ може бути отримана з (A11) простою заміною ν на $-\nu$. Тоді для функції $J_{-\nu}$:

$$J_{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1) \Gamma(-\nu+k+1)} \quad (\text{A12})$$

Необхідно зазначити, що якщо $\nu \notin Z$, то (A11) і (A12) виступають лінійно незалежними розв'язками рівняння (A1), тобто y_ν може бути представлено як їх лінійна комбінація:

$$y_\nu = C_1 J_\nu + C_2 J_{-\nu} \quad (\text{A13})$$

Той факт, що J_ν та $J_{-\nu}$ є лінійно незалежними можна визначити з того факту, що в точці $x = 0$ функція $J_{-\nu}$ прямує до $-\infty$, тому що містить від'ємні ступені x , тоді як J_ν в цій точці дорівнює нулю. Відповідно, вони не можуть бути пов'язані простою пропорційністю.

Інша справа, коли ν є цілим числом. Нехай $\nu = m \in \mathbb{N}$. Гамма-функція, як відомо, має сингулярність при цілих від'ємних значеннях аргументу, включаючи 0. Відповідно, в (A12) коефіцієнти, в яких знаменник має сингулярність, будуть перетворюватися в нуль. Це виконується для всіх $k \leq m-1$.

З огляду на вищесказане, сумування в (A12) буде починатися вже не з 0, а з m . Вводячи новий індекс сумування $n = k - m$, отримаємо для (A12)

$$J_{-m} = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}}{(n+m)! \Gamma(n+1)} \quad (\text{A14})$$

Перетворимо знаменник:

$$(n+m)! \Gamma(n+1) = (n+m)(n+m-1) \dots (n+1)n! \Gamma(n+1) = n! \Gamma(n+m+1).$$

Таким чином, приходимо до виразу, який збігається з виразом для J_m за винятком множника $(-1)^m$, який є константою. Значить

$$J_{-m} = (-1)^m J_m. \quad (\text{A15})$$

При цілому ν функції J_ν і $J_{-\nu}$ є лінійно залежними. Іншими словами, записати загальний розв'язок для випадку $\nu = m \in \mathbb{N}$ у вигляді (A13) вже неможливо. У зв'язку з цим, стоїть завдання відшукати якусь іншу функцію —

розв'язок рівняння (A1), яка при цьому буде лінійно незалежною по відношенню до J_ν при цілих ν .

Таку функцію можна ввести як

$$Y_\nu = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu - J_{-\nu}}{\sin(\nu\pi)} \quad (16)$$

Вона називається *функцією Бесселя другого роду* або *функцією Неймана*. Також поширене позначення N_ν . Вона, очевидно, є розв'язком рівняння (A1) при будь-яких нецілих ν . Лінійна незалежність по відношенню до J_ν очевидна і випливає з того факту, що J_ν та $J_{-\nu}$ — лінійно незалежні. При $\nu = m \in \mathbb{N}$ у формулі (A16) виникає невизначеність виду $0/0$, тому Y_m краще визначити як границю

$$Y_m = \lim_{\nu \rightarrow m} Y_\nu \quad (A17)$$

Границю можна розкрити, використовуючи правило Лопітала:

$$\begin{aligned} Y_m &= \lim_{\nu \rightarrow m} Y_\nu = \lim_{\nu \rightarrow m} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{(\cos(\nu\pi)J_\nu - J_{-\nu})}{(\sin(\nu\pi))} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^m \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right)_{\nu=m} \end{aligned} \quad (A18)$$

В формулі (A18) було використано $\sin(n\pi) = 0$.

Продиференціюємо рівняння (A1), якому задовольняє J_ν по ν :

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} + x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} + (x^2 - \nu^2) \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - 2\nu J_\nu = 0 \quad (A19)$$

Такому ж рівнянню задовільняє $J_{-\nu}$:

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} + x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} + (x^2 - \nu^2) \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} - 2\nu J_{-\nu} = 0 \quad (A20)$$

Помноживши (A20) на $(-1)^v$ і віднімаючи з (A20):

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial J_v}{\partial v} - (-1)^v \frac{\partial J_{-v}}{\partial v} \right\} + x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial J_v}{\partial v} - (-1)^v \frac{\partial J_{-v}}{\partial v} \right\} + (x^2 - v^2) \left\{ \frac{\partial J_v}{\partial v} - (-1)^v \frac{\partial J_{-v}}{\partial v} \right\} - 2v \{ J_v - (-1)^v J_{-v} \} = 0 \quad (A21)$$

Враховуючи тут $v = m$ і з огляду на (A15), а також (A18), переконуємося, що Y_m дійсно задовольняє рівняння (A1) при $v = m$.

Залишилося переконатися в тому, що Y_v при цілому v виступає другим лінійно незалежним розв'язком. Повне доведення досить громіздке, тому просто наведемо ідею цього доведення. Насамперед зазначимо, що в (A18) є похідна $\frac{\partial J_v(x)}{\partial v}$. Далі згадаємо, що в виразі для $J_v(x)$ присутній множник x^v . Відомо, що похідна x^v по v дорівнює $x^v \ln x$. Таким чином, Y_v має особливість в нулі при будь-яких значеннях v , оскільки містить логарифмічний член. Відповідно, як і в випадку з J_{-v} , робимо висновок, що J_v та Y_v представляють собою два лінійно незалежних розв'язки рівняння (A1), тільки тепер уже за будь-яких v .

Після того як було знайдено обидва розв'язки, приступаємо до вивчення їх властивостей. Перш за все наведемо графіки функцій J_v та Y_v :

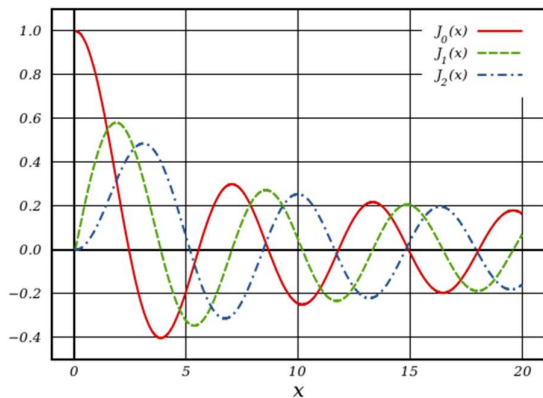


Рис. A1. Функція J_v для $v = 0, 1, 2$

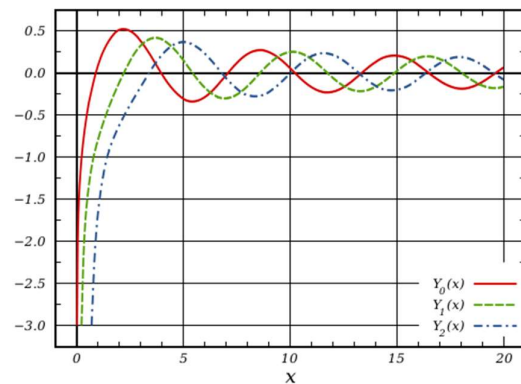


Рис. A2. Функція Y_v для $v = 0, 1, 2$

Як і очікувалося, Y_ν має особливість в точці 0. Відповідно до цього факту, якщо в задачі поле передбачається скінченним (як це зазвичай потрібно в теорії поля з метою усунення фізично абсурдних сингулярностей, що виникають при формальному вирішенні), і область визначення x включає в себе 0, то $Y_\nu(x)$ повинна бути видалена з розв'язку шляхом занулення константи, яка знаходиться перед нею.

На практиці часто доводиться стикатися з необхідністю обчислювати похідні від функцій Бесселя. Можна отримати рекурентні співвідношення, які дозволяють з легкістю оперувати похідними від цих функцій. У більшості випадків нам доводиться стикатися в основному з функціями Бесселя цілого порядку, тому всі подальші формули будуть приведені для випадку $\nu = m \in \mathbb{N}$. Для випадку нецілого ν всі формули доводяться аналогічно тому, як це буде зроблено нижче.

Домножимо (A11) с $\nu = m$ на x^m і продиференціюємо по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x^m J_m) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2m + 2k) x^{2k+2m-1}}{2^{m+2k} k! \Gamma(m + k + 1)} = \\ &= x^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m-1}}{k! \Gamma(m+k)} = x^m J_{m-1} \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

Аналогічним чином отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{-m} J_m) = -x^{-m} J_{m+1} \quad (\text{A23})$$

Розкриваючи похідні в (A22) і (A23), а після додаючи і віднімаючи отримані вирази, можемо отримати два співвідношення:

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) \quad (\text{A24})$$

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x) \quad (\text{A } 25)$$

Видно, що на додачу до шуканого співвідношенню для похідних ми також отримали співвідношення, що дозволяє послідовно виразити функції Бесселя будь-якого порядку, знаючи лише перші дві (J_0 та J_1).

Корисно відзначити окремий випадок формули (A25) при $m = 0$. З огляду на (A15) знайдемо

$$J'_0(x) = -J_1(x) \quad (\text{A26})$$

Ця формула часто буває корисна при вирішенні практичних завдань.

Функції Неймана Y_m задовольняють аналогічним співвідношенням (A24), (A25) з точністю до заміни J_m на Y_m . Це легко показати, користуючись визначенням для Y_m і вже отриманими формулами (A24) і (A25).

Тепер відзначимо, що рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 y_v}{\partial x^2} + x \frac{\partial y_v}{\partial x} + (\lambda^2 x^2 - v^2) y_v = 0 \quad (\text{A27})$$

елементарною заміною $z = \lambda x$ зводиться до рівняння Бесселя. Дійсно, $\lambda^2 x^2$ просто переходить в z^2 , а в членах з похідними λ скорочується. Це означає, що загальний розв'язок може бути подано у вигляді

$$y_v = C_1 J_v(\lambda x) + C_2 Y_v(\lambda x) \quad (\text{A28})$$

Розглянемо випадок, коли $\lambda = \pm i$, тобто рівняння (A27) переходить в

$$x^2 \frac{\partial^2 y_v}{\partial x^2} + x \frac{\partial y_v}{\partial x} - (x^2 - v^2) y_v = 0 \quad (\text{A29})$$

Дане рівняння називається *модифікованим рівнянням Бесселя*.

Його розв'язком виступає лінійна комбінація функцій J_ν та Y_ν з аргументом ix . В цьому випадку J_ν та Y_ν будуть, очевидно, комплексними функціями x . Здамося тепер метою визначити дійсні функції, лінійна комбінація яких дає розв'язок рівняння (A29).

Нехай $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$. Згадуючи вираз для J_ν можемо написати

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{ix}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \quad (\text{A30})$$

що вже представляє собою дійсну функцію x .

Другу функцію K_ν , введемо в такий спосіб:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{A31})$$

Можна показати, що $I_\nu(x)$ та $K_\nu(x)$ виступають лінійно незалежними розв'язками рівняння (A29). Вони називаються, відповідно, *функцією Інфельда* і *функцією Макдональда* порядку ν . Також поширені назви *модифікована функція Бесселя першого і другого роду*, відповідно.

Для $I_\nu(x)$ та $K_\nu(x)$ можуть бути отримані рекурентні співвідношення подібні співвідношенням (A24), (A25). Вони виводяться аналогічно, шляхом перетворень з цими функціями, представленими у вигляді степеневих рядів. Наведемо без виведення деякі з цих співвідношень:

$$I_{m-1}(x) - I_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} I_m(x) \quad (\text{A32})$$

$$I_{m-1}(x) + I_{m+1}(x) = 2I'_m(x) \quad (\text{A33})$$

$$K_{m-1}(x) - K_{m+1}(x) = -\frac{2m}{x} K_m(x) \quad (\text{A34})$$

$$K_{m-1}(x) + K_{m+1}(x) = -2K'_m(x) \quad (A35)$$

Наведемо графіки функцій $I_\nu(x)$ та $K_\nu(x)$:

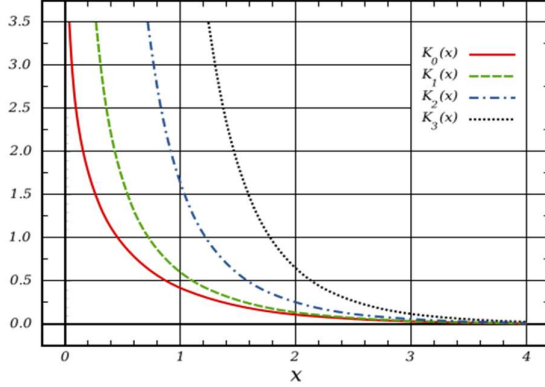


Рис. А3. Функція $I_\nu(x)$ для $\nu = 0, 1, 2, 3$

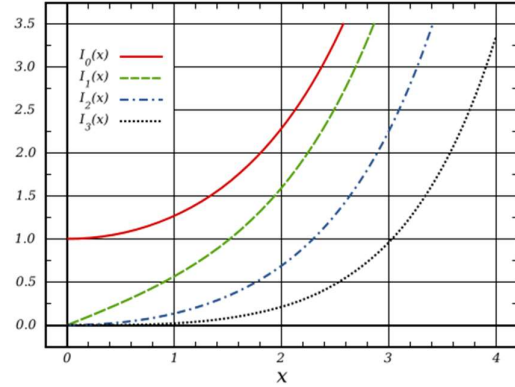


Рис. А4. Функція $K_\nu(x)$ для $\nu = 0, 1, 2, 3$

Як видно, I_ν залишається скінченною при аргументі, що прямує до нуля. Функція K_ν , навпаки, має особливість в точці $x = 0$, тому, за аналогією з Y_ν , цей розв'язок має бути відкинуто, якщо точка 0 входить в область визначення x .

Зазначимо ще один тип рівнянь, який може бути приведений до виду рівняння (A1) або рівняння (A29). Це рівняння має вигляд

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} \pm (x^{2\gamma} - \nu^2 \gamma^2) y = 0, \quad (A36)$$

де γ передбачається дійсним числом.

Введемо позначення $\beta = \gamma^{-1}$. Домножимо $x^{2\gamma}$ в рівнянні (A36) на $\beta^2 \gamma^2 = 1$. Це дає:

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} \pm (\beta^2 \gamma^2 x^{2\gamma} - \nu^2 \gamma^2) y = 0 \quad (A37)$$

Введемо нову змінну $t = x^\gamma$. Тепер, переходячи від диференціювання по x до диференціювання по t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \gamma x^{\gamma-1} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} \frac{dy}{dt} + \gamma x^{\gamma-1} \frac{d}{dx} \frac{dy}{dt} = \gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} \frac{dy}{dt} + \gamma^2 x^{2\gamma-2} \frac{d^2y}{dt^2}$$

Підставляючи отримані формули в (A37), отримуємо:

$$\gamma^2 x^{2\gamma} \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma(\gamma-1)x^\gamma \frac{dy}{dt} + \gamma x^\gamma \frac{dy}{dt} \pm (\beta^2 \gamma^2 x^{2\gamma} - \nu^2 \gamma^2)y = 0 \quad (\text{A38})$$

Спростивши, а після розділивши на γ^2 , отримаємо:

$$x^{2\gamma} \frac{d^2y}{dt^2} + x^\gamma \frac{dy}{dt} \pm (\beta^2 x^{2\gamma} - \nu^2)y = 0 \quad (\text{A39})$$

Замінюючи x^γ на t , отримуємо рівняння типу (27):

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} \pm (\beta^2 t^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\text{A40})$$

Розв'язком цього рівняння, в залежності від знака перед $(\beta^2 t^2 - \nu^2)y$, виступають лінійна комбінація $J_\nu(\beta x^\gamma)$ та $Y_\nu(\beta x^\gamma)$, або $I_\nu(\beta x^\gamma)$ та $K_\nu(\beta x^\gamma)$, оскільки $t = x^\gamma$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача, М., «Енергия», 1975, - 488 с.
2. Мухачев Г.А. Термодинамика и теплопередача, М.: Высш. шк. , 1991. — 480 с.
3. П. Шнайдер Инженерные проблемы теплопроводности, М.: ИИЛ, 1960, - 480 с.
4. Rajendra Karwa Heat and mass transfer: Second edition, Springer, - 2020, - p. 1147
5. William S. Janna Engineering Heat Transfer: Third Edition, CRC Press – 2009
6. Charles H. Forsberg Heat Transfer Principles and Applications, Academic Press, - 2020, - p. 545
7. Greg F. Naterer Advanced Heat Transfer Second Edition, CRC Press – 2018, - p. 514